n.p.
45

Bibliothek des Kapuzinerklosters
Mathem. 12° 14.
ROSENHEIM
Math. p. 745 s

92-11

# Grundzüge
der
# allgemeinen Arithmetik
für
den ersten Unterricht,
besonders
an technischen Schulen,

entworfen
von
Dr. J. B. Wandner,
k. b. Rector der Kreis-Landwirthschafts- und Gewerbsschule, und
Lyceal-Professor zu Regensburg.

Bibliotheca
Rosenhemii
Capucinorum

Mit Tafeln
der gemeinen Logarithmen für die Zahlen von 1 bis 10000.

Sulzbach,
in der J. E. v. Seidelschen Buchhandlung.
1837.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

BSB
MÜNCHEN

07/95/262

# Vorrede.

Im Plane der k. bayerischen Landwirthschafts- und Gewerbs-Schulen, so wie der meisten auswärtigen technischen Schulen, ist auch „die Algebra" unter die Zahl der Unterrichtsgegenstände aufgenommen, ohne Zweifel aus zwei Gründen, nämlich als vorzügliches Mittel zur Erreichung des nothwendig allen Schulen gemeinsamen Zweckes, zur Weckung, Uebung und Stärkung der Verstandeskräfte in den Schülern, und wegen ihrer vielfachen Anwendbarkeit in technischer Beziehung. Damit aber „die Algebra" als formelles Bildungsmittel diene, müssen ihre Sätze in systematischer Ordnung vorgetragen, und möglichst begründet werden. Zur Erreichung des den technischen Schulen gesetzten speciellen Zweckes, Beförderung der technischen Bildung müssen recht viele Aufgaben aus dem gemeinen Leben, der Technik gelöst, vorzüglich jene Sätze hervorgehoben werden, welche im praktischen Leben Anwendung finden. Da ferner an den technischen Schulen sehr viele Unterrichtsgegenstände zu lehren sind, und deßhalb den einzelnen Gegenständen nur verhältnißmäßig wenige Unterrichtsstunden zugewiesen werden können; da viele in ihrer Bildung noch nicht weit vorgeschrittene und viele unbemittelte Jünglinge die genannten Schulen besuchen: so dürften Kürze, Faßlichkeit und Wohlfeilheit nicht weniger nothwendige Eigenschaften jedes dafür bestimmten Lehrbuches seyn.

Von den bemerkten Gesichtspunkten ging der Verfasser dieser Grundzüge bei deren Entwerfung aus. Er suchte eine gedrängte systematische, und möglichst begründete Uebersicht des für Gewerbs-Schulen bestimmten Gebietes der allgemeinen Arithmetik zu geben, überging solche Lehren, welche zur Gewinnung einer allgemeinen Uebersicht nicht wesentlich nothwendig, und von geringerer praktischen Anwendbarkeit sind, z. B. die Combinationslehre, den binomischen Lehrsatz ꝛc., ganz, und behandelte jene Lehren nur kurz, welche in der ersten Beziehung nothwendig, in der zweiten aber minder wichtig sind, z. B. die Rechnung mit Wurzelgrößen, oder als schon aus der Rechenkunst bekannt vorausgesetzt werden können,

z. B. die Proportionslehre. Aus dem letzten Grunde wurde auch die Bruchlehre nur sehr kurz berührt, indem jeder Schüler, welcher dieselbe aus der Rechenkunst und die Rechnungsarten mit allgemeinen ganzen Zahlen vollkommen aufgefaßt hat, auch die hin und wieder vorkommenden durch allgemeine Zahlen ausgedrückten Brüche richtig zu behandeln wissen wird. Deßhalb wurden zur Uebung bei den Gleichungen einzelne Beispiele von Brüchen etwas ausführlicher berechnet. Bei allen wichtigeren Sätzen wurde eine nach dem vorgesetzten Umfange dieser Grundzüge große Zahl von Aufgaben beigefügt, davon mehrere aus der Geometrie und Mechanik entnommen, weil der Unterricht in den zuletzt genannten Wissenschaften nach dem Plane für die bayerischen Landwirthschafts- und Gewerbsschulen wenigstens zum Theil bereits vorausgesetzt werden kann. Sollte jene Zahl von Aufgaben als noch zu gering betrachtet werden, so kann sie von dem Lehrer durch Bildung ähnlicher Aufgaben oder aus den vielen vorhandenen Uebungsbüchern leicht ergänzt werden; sollten die Aufgaben aus der Geometrie und Mechanik den Vorkenntnissen der Schüler nicht entsprechend befunden werden, so können sie durch andere leicht ersetzt werden.

In wie ferne der bei Entwerfung dieser Grundzüge vorgesetzte Zweck: Faßlichkeit mit möglichster Berücksichtigung der Gründlichkeit und praktischen Anwendbarkeit neben Kürze und Wohlfeilheit erreicht worden ist, überläßt der Verfasser dem billigen Ermessen der Sachkenner. Möge darüber ein nicht minder günstiges Urtheil gefällt werden können, als das von mir umgearbeitete „Lehrbuch der Rechenkunst von J. B. Weigl, mit metrologischen Tafeln, IV. Aufl. Sulzbach 1836", an welches sich diese Grundzüge zunächst anschließen, (in der allgem. Schulzeitung von Zimmermann, Darmstadt, Januar 1837, Nro. 17.) gefunden hat.

Die Sorgfalt, mit welcher Correctur und Revision besorgt worden sind, läßt hoffen, daß sich wenigstens keine bedeutenderen Druckfehler vorfinden werden.

Regensburg, im Monate Juni 1837.

Der Verfasser.

# Inhalt.

Seite

Einleitung. . . . . . . . . . . . . 1

## Erste Abtheilung. Buchstabenrechnung.

Erster Artikel. Allgemeine Erklärungen. . . . . . 3

Zweiter Artikel. Addition und Subtraction. . . . 7

Dritter Artikel. Multiplication und Division. . . . 11

Vierter Artikel. Potenziren und Wurzelausziehen:

A. Im Allgemeinen auf einfache Größen bezogen. . . . . . . . 20

B. Rechnungsarten mit Wurzelgrößen. . 23

C. Quadrat und Quadratwurzel zusammengesetzter Größen. . . . 25

D. Kubus und Kubikwurzel zusammengesetzter Größen. . . . . 31

## Zweite Abtheilung. Algebra.

Erster Artikel. Allgemeine Erklärungen. . . . . 38

Zweiter Artikel. Einfache Gleichungen:

A. Mit einer unbekannten Größe. . 40

B. Bestimmte Gleichungen mit mehreren Unbekannten. . . . . . 48

C. Unbestimmte Gleichungen. . . 57

Dritter Artikel. Quadratische Gleichungen. . . . . 65

## Dritte Abtheilung. Verhältnißlehre.

Erster Artikel. Von den Verhältnissen. . . . . 70

Zweiter Artikel. Von den Proportionen. . . . . 71

A. Arithmetische Proportionen. . . 72

B. Geometrische Proportionen. . . 72

Drittes Artikel. Von den Progressionen. . . . . . 75
A. Arithmetische Progressionen. . . 76
B. Geometrische Progressionen. . . 79
Vierter Artikel. Von den Logarithmen. . . . . . 82
Erläuterung und Gebrauch der am Ende beigefügten Logarithmentafeln. . . 85
Aufgaben für Logarithmenrechnung. . 88
Anwendung der Logarithmen auf Zins=Zinsenrechnung. . . . . . . . 92
Anhang. Tafeln der gemeinen oder briggischen Logarithmen für alle natürlichen Zahlen von 1 bis 10000. . 96

# Einleitung.

§. 1.

1. Jedes Ding für sich betrachtet, ist eine Einheit. Mehrere Einheiten derselben Art zusammen bilden eine Zahl, und zwar eine besondere Zahl, wenn die Menge der Einheiten bestimmt ist, eine allgemeine Zahl (oder Größe), wenn jene Menge unbestimmt ist.

2. Die besonderen Zahlen bezeichnet man mit Ziffern, die allgemeinen mit den Buchstaben des kleinern lateinischen Alphabets.

3. Die Zahlen können auf mehrfache Weise mit einander verbunden, verglichen und nach ihren gegenseitigen Beziehungen betrachtet werden.

4. Die Lehre hievon heißt Arithmetik oder Zahlenlehre, und zwar

a) besondere, wenn nur besondere Zahlen,

b) allgemeine, wenn auch und vorzugsweise allgemeine Zahlen betrachtet werden.

5. Bei der allgemeinen, so wie bei der besondern Arithmetik können nach der angegebenen Betrachtungsweise drei Abtheilungen unterschieden werden, nämlich die Lehre

a) von den einfachern Verbindungen der Zahlen in den Rechnungsarten (Operationen), nach der Bezeichnungsart der Zahlen Ziffern- oder Buchstabenrechnung genannt,

b) von den Verbindungen der Zahlen nach ihrer Gleichheit, Algebra genannt,

c) von den verschiedenen Beziehungen der Zahlen zu einander, Verhältnißlehre genannt.

Zusatz. Die Einführung der allgemeinen Größen und ihre Bezeichnung durch Buchstaben war für Erweiterung der Mathematik, selbst in Beziehung ihrer Anwendbarkeit auf das praktische Leben, von großer Wichtigkeit, indem mittelst der allgemeinen Größen nicht nur Wahrheiten allgemein bewiesen, sondern auch Aufgaben allgemein gelöst, d. i. Formeln gefunden werden können, nach welchen auf eine ganz einfache und kurze Art alle ähnlichen Aufgaben berechnet werden.

Anmerkung. Die besondere Arithmetik nennt man häufig, jedoch gewöhnlich mit Hinweglassung der Gleichungslehre und Beschränkung der Verhältnißlehre, Rechenkunst; die allgemeine Arithmetik manchmal, aber unrichtig, Algebra.

# Erste Abtheilung.

## Buchstabenrechnung.

### Erster Artikel.

### Allgemeine Erklärungen.

§. 2.

I. In der Buchstabenrechnung unterscheidet man sechs einfache Verbindungsarten, *Rechnungsarten* oder *Operationen* genannt:

1) die *Addition*, bei welcher ungleiche Zahlen zu einem Ganzen vereinigt werden;
2) die *Subtraction*, wodurch von einem Ganzen ein Theil hinweggenommen, oder der Unterschied zwischen beiden gefunden wird;
3) die *Multiplication*, bei welcher gleiche Zahlen zu einem Ganzen vereinigt werden;
4) die *Division*, wodurch ein Ganzes in gleiche Theile zerlegt, und die Größe von einem derselben bestimmt wird;
5) die *Potenzirung*, wodurch eine Zahl mehrmal mit sich selbst multiplicirt wird (gleiche Zahlen als Factoren verbunden werden);
6) das *Wurzelausziehen*, wodurch eine Zahl gefunden wird, welche potenzirt die gegebene Zahl wieder gibt (ein Ganzes in gleiche Factoren zerlegt wird).

II. Von diesen Operationen sind Addition, Multiplication und Potenzirung Zahlen vereinigend, Subtraction, Division und Wurzelausziehen Zahlen trennend, und zwar in der Art, daß Addition und Subtraction, Multiplication und Division, Potenzirung und Wurzelausziehen sich entgegengesetzt sind, und daher gegenseitig zur Prüfung dienen.

III. Die ersten vier der oben genannten Operationen heißt man Stammrechnungsarten, weil sie den beiden letzten, so wie allen zusammengesetzteren Zahlen-Verbindungen zu Grunde liegen.

Anmerkung. Auch in der Ziffernrechnung könnten sechs Rechnungsarten unterschieden werden; jedoch werden Potenzirung und Wurzelausziehen in den meisten Lehrbüchern der Rechenkunst (so auch in dem von mir umgearbeiteten Weiglschen Lehrbuche. Sulzbach, 1836. IV. Auflage.) übergangen, weil die Lehre derselben auch für besondere Zahlen einfacher und gründlicher abgehandelt werden kann, wenn die Lehre von den vier Stammrechnungsarten mit allgemeinen Zahlen vorausgegangen ist. Daher werden im Folgenden die beiden vorgenannten Lehren zugleich auf besondere und allgemeine Zahlen bezogen.

§. 3.

1. Die aus der Ziffernrechnung bekannten Benennungen und Zeichen für die vier Stammrechnungsarten werden auch hier beibehalten. Z. B. $a + b$ drückt allgemein die Summe zweier Summanden, $a - b$ allgemein die Differenz zwischen dem Minuend $a$ und dem Subtrahend $b$, $a \times b$ oder $a . b$ oder $ab$ das Product der Factoren $a$ und $b$; $a : b$ oder $\frac{a}{b}$ den Quotienten oder Bruch aus, welchen man erhält, wenn man das Dividend $a$ durch den Divisor $b$ dividirt.

2. Soll die nämliche Größe öfters als Summand stehen, so wird dieß durch eine jener Größe vorgesetzte Zahl ausgedrückt, welche man Coefficient nennt. Z. B. In $4a$ drückt der Coefficient 4 aus, daß $a$ viermal als Summand stehen, oder mit 4 multiplicirt werden soll. Ist einer Größe kein Coefficient vorgesetzt, so wird 1 als solcher vorgesetzt gedacht.

3. Soll eine Zahl öfters als Factor stehen, so drückt man dieß durch eine über dieselbe zur Rechten mit kleinerem Schriftzeichen gesetzte Zahl aus. Letztere heißt Exponent, erstere Wurzel, die Verbindung von beiden (das Product gleicher Factoren) Potenz oder Würde. Ist der Exponent 2, so heißt die Potenz Quadrat; ist der Exponent 3, so heißt sie Kubus. Z. B. $a^5$ — lies $a$ der fünften (Würde) — drückt die fünfte

Potenz von a oder aaaaa aus, a ist die Wurzel, 5 der Exponent; $3^2$ oder 9 ist das Quadrat von 3. Ist bei einer Zahl kein Exponent ausgesetzt, so ist dabei 1 als solcher zu verstehen.

4. Die Gleichheit zweier Größen wird durch das Zeichen $=$, die Ungleichheit durch das Zeichen $>$ oder $<$ ausgedrückt, letztere in der Art, daß die Oeffnung des Zeichens gegen die größere, die Spitze gegen die kleinere Größe gekehrt ist. Z. B. $2^3 = 8$ heißt: der Kubus von 2 ist gleich 8; $a + b > a$ heißt: die Summe der beiden Größen a und b ist größer, als das einzelne Summand a; $a - b < a$ heißt: der Unterschied zwischen den Größen a und b ist kleiner, als das Minuend a.

§. 4.

1. Mehrere durch das Zeichen $+$ oder $-$ verbundene Größen bilden eine zusammengesetzte Größe, Polynomium; eine einzelne Größe davon heißt Glied. Eine Größe allein gesetzt nennt man einfach.

2. Sollen zusammengesetzte oder überhaupt mehrere mit einander verbundene Größen als ein Ganzes betrachtet, und als solches mit andern durch eine arithmetische Operation verbunden werden, so werden dieselben in Klammern eingeschlossen. Z. B. $(a+b) \times (c+d)$ heißt: die Summe der beiden Größen a und b soll durch die Summe der Größen c und d multiplicirt werden; $(a+b) \times c + d$ heißt aber: die Summe der Größen a und b soll mit c multiplicirt, und zu diesem Producte d addirt werden. $(a \,.\, b)^n$ heißt: das Product aus a in b soll zur nten Potenz erhoben, dagegen $a \,.\, b^n$ heißt: a soll mit der nten Potenz von b multiplicirt werden.

§. 5.

Allgemeine Zahlen heißen gleichartig, wenn sie durch gleiche Buchstaben und Exponenten bezeichnet sind, z. B. 3a und 6a oder $5a^2$ und $7a^2$. Sind die Buchstaben oder Exponenten ungleich, so heißen die Größen ungleichartig, z. B. 4a und 4b, oder 3a und $6a^2$.

§. 6.

1. Größen, welche die nämliche Beziehung zur Einheit haben, und daher bei ihrer Verbindung einander vermehren, heißen übereinstimmend; Größen, welche eine entgegengesetzte Beziehung zur Einheit haben, und daher bei ihrer Verbindung

einander ganz oder zum Theil aufheben, heißen entgegengesetzt. Z. B. Bewegungen oder Ausdehnungen nach der nämlichen Richtung, Vermögen und Vermögen rc. sind übereinstimmende; Vorwärts- und Rückwärtsgehen, Vermögen und Schulden, Gewinn und Verlust sind entgegengesetzte Größen.

2. Von zwei entgegengesetzten Größen heißt die eine positiv oder bejaht, die andere negativ oder verneint. An und für sich ist es zwar gleichgültig, welche von zwei entgegengesetzten Größen als positiv, welche als negativ genommen wird; doch ist bei vielen Beziehungen eine bestimmte Größe allgemein als positiv und deren Gegentheil als negativ angenommen. Z. B. Vorwärtsgehen, Vermögen, Gewinn werden als positive; Rückwärtsgehen, Schulden, Verlust als negative Größen betrachtet.

3. Da entgegengesetzte Größen in der nämlichen Beziehung zu einander stehen, in welcher Addition und Subtraction stehen, so gebraucht man auch zur Bezeichnung der ersteren die Zeichen der letzteren, und zwar für positive Größen das Zeichen +, für negative das Zeichen —.

4. Ist das erste Glied einer zusammengesetzten Größe positiv, so wird das Zeichen + gewöhnlich hinweggelassen.

5. Die Einheit und jede daraus entstandene Zahl wird an und für sich und ohne Beziehung auf Entgegensetzung als positiv betrachtet.

6. Entgegengesetzte Größen müssen, abgesehen von ihrer Entgegensetzung, gleichartig seyn. Z. B. Vermögen und Schulden sind gleichartig, da sie sich beide auf Geld beziehen.

§. 7.

Aus dem Begriffe der entgegengesetzten Größen ergeben sich nachstehende Folgesätze:

1. Gleiche entgegengesetzte Größen oder gleiche Größen mit verschiedenen Zeichen zu einander gesetzt (addirt) heben sich gegenseitig auf.

Z. B. $+ 3a - 3a = 0$.

2. Ungleiche entgegengesetzte Größen zu einander (als Summanden) gesetzt, vermindern sich in der Art, daß die kleinere ganz verschwindet, und von der größern nur der Ueberschuß über die kleinere übrig bleibt.

Z. B. $+6a - 2a = +4a$

$+2a - 6a = -4a$.

3. Zwei entgegengesetzte Größen addiren heißt daher, da gleiche Gegentheil der kleinern von der größern subtrahiren.

Z. B. $6a + (-2a) = 6a - (+2a) = 4a$

$-6a + (+2a) = -6a - (-2a) = -4a$.

4. Umgekehrt: zwei Größen von einander subtrahiren, heißt das gleiche Gegentheil des Subtrahends zum Minuend addiren.

Z. B. $6a - (+2a) = 6a + (-2a) = 4a$

$-6a - (-2a) = -6a + (+2a) = -4a$

Ebenso $5a - (-3a) = 5a + (+3a) = 8a$.

Anmerkung. Um sich die Richtigkeit des vierten Folgesatzes in Beziehung auf das letzte Beispiel deutlich zu machen, stelle man die Aufgabe: es werde von $5a$ abgezogen $-3a$, in folgender Art: es werde der Unterschied zwischen $+5a$ und $-3a$ gesucht. Dieser ist nun offenbar $+8a$; denn es muß zu $-3a$ noch $+8a$ hinzukommen, bis es dem $+5a$ gleich wird.

---

# Zweiter Artikel.

## Addition und Subtraction.

---

§. 8.

Aufgabe. Einfache Größen zu addiren.

Auflösung. Sind die Summanden

1. gleichartig und

a) übereinstimmend, so addire man die Coefficienten, setze die Buchstaben mit ihren Exponenten einmal hinzu, und gebe der Summe das Zeichen der Summanden (§. 6. 1°);

Z. B. $3a^2 + 4a^2 + a^2 = 8a^2$

$-5b - 2b - 3b = -10b$.

b) entgegengesetzt, so ziehe man den kleineren Coefficienten vom größern ab, und gebe dem Reste das Zeichen der größern Größe (§. 7. 2° und 3°);

Z. B. $5a^2b - 3a^2b = 2a^2b$

$4ab^2 - 7ab^2 = -3ab^2$.

c) Sind mehrere gleichartige Größen mit verschiedenen Zeichen zu addiren, so bringe man die positiven und negativen einzeln in eine Summe, und ziehe die kleinere Summe von der größern ab.

Z. B. $6a^3 - 3a^3 + 2a^3 - 4a^3 = 8a^3 - 7a^3 = a^3$.

2. Sind die Summanden ungleichartig, so kann die Addition nur angezeigt werden. Dieß geschieht dadurch, daß man dieselben mit ihren eigenthümlichen Zeichen, gewöhnlich in alphabetischer Ordnung zusammensetzt.

Z. B. Die Summe von $+3b$ und $+2a^2$ ist $= 2a^2 + 3b$
die Summe von $+4b^3$ und $-3c^2$ ist $= 4b^3 - 3c^2$.

## §. 9.

Aufgabe. Zusammengesetzte Größen zu addiren.

Auflösung. Man schreibe die gegebenen Summanden so an, daß gleichartige Glieder untereinander zu stehen kommen; addire diese auf die im §. 8 angegebene Art, und setze die so erhaltenen Theilsummen unter einen horizontalen Strich.

Anmerkung. Da bei allgemeinen Zahlen nicht, wie bei besondern, durch die verschiedene Stelle der einzelnen Glieder ein verschiedener Localwerth bestimmt, und bei der Addition nicht von einem Gliede die höhere Einheit zum vorausstehenden gezählt wird, so fängt man die Addition gewöhnlich zur Linken an.

Beispiele. I. $(a + b) + (a - b)$.

II. $(3a^2 - 2ab^2 + 2b^2) + (a^2 - b + 3ab^2)$.

III. $(2a^3 - 5a^2b + 4ab^2) + (4a^3 + 4a^2b - 3ab^2) + (3a^3 + a^2b - 2ab^2)$.

Berechnung. I.
$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline 2a. \end{array}$$

Mit Worten: wenn man zur Summe zweier Größen deren Differenz addirt, so erhält man das Doppelte der größern Größe.

II.

$$
\begin{array}{rrrr}
3a^2 & -\,2ab^2 & +\,2b^2 & \\
a^2 & +\,3ab^2 & -\,b & \\
\hline
4a^2 & +\,ab^2 & +\,2b^2 & -\,b.
\end{array}
$$

III.

$$
\begin{array}{rrr}
2a^3 & -\,5a^2b & +\,4ab^2 \\
4a^3 & +\,4a^2b & -\,3ab^2 \\
3a^3 & +\,a^2b & -\,2ab^2 \\
\hline
9a^3 & & -\,ab^2.
\end{array}
$$

§. 10.

**Aufgabe.** Zusammengesetzte Größen zu subtrahiren.

**Auflösung.** Man schreibe das Subtrahend unter das Minuend so, daß gleichartige Glieder unter einander zu stehen kommen, ändere im Subtrahend die Zeichen und addire. (§. 7. 4°)

**Beispiele.** I. $(a+b)-(a-b)$.

II. $(3a^2-6a^2b-4ab^2+6b^2)-(2a^2-6a^2b+4ab^2+7b^2-c)$.

**Berechnung.** I.

$$
\begin{array}{rr}
a & +\,b \\
a & -\,b \\
- & + \\
\hline
 & 2b.
\end{array}
$$

Mit Worten: wenn man von der Summe zweier Größen deren Differenz subtrahirt, so erhält man das Doppelte der kleineren Größe.

II.

$$
\begin{array}{rrrrr}
3a^2 & -\,6a^2b & -\,4ab^2 & +\,6b^2 & \\
2a^2 & -\,6a^2b & +\,4ab^2 & +\,7b^2 & -\,c \\
- & + & - & - & + \\
\hline
a^2 & & -\,8ab^2 & -\,b^2 & +\,c.
\end{array}
$$

**Zusatz.** Mit der angegebenen Auflösung übereinstimmend ist das Verfahren, zusammengesetzte, in Klammern eingeschlossene und durch das Zeichen — mit andern verbundene Größen außer die Klammern zu setzen, d. i. ohne diese mit den übrigen Größen zu verbinden. Man hat hiebei nur die Zeichen der einzelnen Glieder zu ändern. Z. B. $a-(b-c+d)=a-b+c-d$. Umgekehrt bezieht man das Zeichen — als gemeinschaftliches Zeichen auf mehrere Glieder, wenn man bei diesen die Zeichen ändert, und sie nach dem gemeinschaftlichen Zeichen — in Klammern setzt. Z. B. $2a^2-4b^2-3c+d=2a^2-(4b^2+3c-d)$.

§. 11.

**Aufgabe.** Die Addition und Subtraction zu prüfen.

**Auflösung.** Addition und Subtraction dienen sich gegenseitig zur Prüfung (§. 2. II.). Man prüft nämlich die Addition dadurch, daß man bei zwei gegebenen Summanden das eine, oder bei mehreren die Summe aller mit Ausnahme eines Summanden von der Gesammtsumme subtrahirt, wornach bei richtig vorgenommener Addition das nicht in Rechnung gebrachte Summand als Differenz erscheinen muß.

Man prüft die Subtraction, wenn man das Subtrahend zur Differenz addirt, wornach sich das Minuend als Summe ergeben muß.

**Probe über das II. Beispiel des §. 9.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Erhaltene Summe | $4a^2$ | $+ ab^2$ | $+ 2b^2$ | $- b$ |
| Gegebenes zweites Summand | $a^2$ | $+ 3ab^2$ | | $- b$ |
| | $-$ | $-$ | | $+$ |
| Differenz | $3a^2$ | $- 2ab^2$ | $+ 2b^2$ | |

gleich dem gegebenen ersten Summanden.

**Probe über das III. Beispiel des §. 9.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $2a^3$ | $- 5a^2b$ | $+ 4ab^2$ |
| | $4a^3$ | $+ 4a^2b$ | $- 3ab^2$ |
| | $3a^3$ | $+ a^2b$ | $- 2ab^2$ |
| Summe | $9a^3$ | | $- ab^2$ |
| Summe des 2. u. 3. Summanden | $7a^3$ | $+ 5a^2b$ | $- 5ab^2$ |
| | $-$ | $-$ | $+$ |
| | $2a^3$ | $- 5a^2b$ | $+ 4ab^2$. |

**Probe über das II. Beispiel des §. 10.**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Erhaltene Differenz | $a^2$ | | $- 8ab^2$ | $- b^2$ | $+ c$ |
| Gegebenes Subtrahend | $2a^2$ | $- 6a^2b$ | $+ 4ab^2$ | $+ 7b^2$ | $- c$ |
| Summe | $3a^2$ | $- 6a^2b$ | $- 4ab^2$ | $+ 6b^2$. | |

§. 12.

**Grundsätze.**

1. Gleiches zu Gleichem addirt, gibt gleiche Summen; Gleiches von Gleichem subtrahirt, gibt gleiche Differenzen.

| | | |
|---|---|---|
| Wenn | $a = b$ | $a = b$ |
| und | $c = d$ | $c = d$ |
| so ist | $a + c = b + d$ | $a - c = b - d$. |

2. Gleiches zu Ungleichem, oder Ungleiches zu Gleichem addirt, gibt ungleiche Summen, und zwar da die größere Summe, wo das eine größere Summand ist.

$$\begin{array}{rl} \text{Wenn} & a = b \\ \text{und} & c > d \\ \hline \text{so ist} & a + c > b + d. \end{array}$$

3. Gleiches von Ungleichem, oder Ungleiches von Gleichem subtrahirt, gibt ungleiche Differenzen, und zwar da die größere Differenz, wo bei einerlei Minuend das Subtrahend kleiner, oder bei einerlei Subtrahend das Minuend größer ist.

$$\begin{array}{rl} \text{Wenn} & a = b \\ \text{und} & c < d \\ \hline \text{so ist} & a - c > b - d \end{array} \qquad \begin{array}{c} a > b \\ c = d \\ \hline a - c > b - d. \end{array}$$

Zusatz. Die Differenz zweier Größen bleibt unverändert, wenn man Gleiches zum Minuend und Subtrahend addirt oder davon subtrahirt.

---

# Dritter Artikel.

## Multiplication und Division.

### §. 13.

#### Erklärungen.

1. Eine Größe A (Multiplicand) mit einer andern m (dem Multiplicator) multipliciren, heißt erstere so oft und in der Beziehung nehmen, als die Einheit in der andern enthalten ist.

2. Eine Größe mit einer positiven Größe multipliciren, heißt daher, erstere in der gegebenen Beziehung, also mit dem gegebenen Zeichen so oft nehmen, als der Multiplicator anzeigt. Eine Größe mit einer negativen Größe multipliciren, heißt, erstere in einer Beziehung, welche der gegebenen entgegengesetzt ist, also mit entgegengesetztem Zeichen so oft nehmen, als letztere angibt (§. 6. 5°).

Daher

$$+a \times +4 = +a +a +a +a = +4a$$
$$-a \times +4 = -a -a -a -a = -4a$$
$$+a \times -4 = -a -a -a -a = -4a$$
$$-a \times -4 = +a +a +a +a = -4a.$$

Zusatz. Zwei Factoren mit gleichen Zeichen geben ein positives, mit ungleichen Zeichen ein negatives Product.

§. 14.

Erklärungen.

1. Die Multiplication zweier Größen wird dadurch angezeigt, daß man sie ohne Zwischenzeichen, gewöhnlich in alphabetischer Ordnung zusammensetzt.

Z. B. $+a \times -b = -ab$ und $-a \times -a = +aa = a^2$.

2. Dasselbe gilt, wenn mehrere Factoren gegeben sind, indem man zuerst die beiden ersten Factoren mit einander, dann das Product mit dem dritten Factor multiplicirt ꝛc. Sind daher auch besondere Zahlen als Coefficienten gegeben, so werden diese wie gewöhnliche Zahlen multiplicirt.

Z. B. $+a \times -c \times -b = -ac \times -b = +abc$

$-3a^2 \times +4b = -12a^2 \times +b = -12a^2b.$

3. Potenzen von gleichen Wurzeln werden mit einander multiplicirt, indem man ihre Exponenten addirt.

Denn z. B. $a^2 \times a^3 = aa \times aaa = aaaaa = a^5$ (§. 3. 3°).

§. 15.

Aufgabe. Zusammengesetzte Größen zu multipliciren.

Auflösung. Man multiplicire jedes Glied des Multiplicands durch den Multiplicator, und zwar, wenn auch dieser eine zusammengesetzte Größe ist, durch jedes Glied desselben, und addire die Partialproducte.

Beweis. Ein aus mehreren Theilen bestehendes Ganze wird durch eine andere Größe multiplicirt, wenn man jeden Theil einzeln in der verlangten Art multiplicirt.

Beispiele.

I. $(a^2 + 2ab - 3b^2) \times +2a^2$.

II. $(a + b) \times (a - b)$.

III. $(3a^3 - 2a^2b + 6ab^2 - b^3) \times (2a^2 - 3ab + 4b^2)$.

### Berechnung.

I. $(a^2 + 2ab - 3b^2) \times + 2a^2 = 2a^4 + 4a^3b - 6a^2b^2$.

II.
$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \quad\quad \\ - ab - b^2 \\ \hline a^2 \quad\quad - b^2. \end{array}$$

Das Product aus der Summe zweier Größen in deren Differenz ist der Differenz ihrer Quadrate gleich.

III.
$$\begin{array}{rrrrrr} 3a^3 & - 2a^2b & + 6ab^2 & - b^3 & & \\ 2a^2 & - 3ab & + 4b^2 & & & \\ \hline 6a^5 & - 4a^4b & + 12a^3b^2 & - 2a^2b^3 & & \\ & - 9a^4b & + 6a^3b^2 & - 18a^2b^3 & + 3ab^4 & \\ & & 12a^3b^2 & - 8a^2b^3 & + 24ab^4 & - 4b^5 \\ \hline 6a^5 & - 13a^4b & + 30a^3b^2 & - 28a^2b^3 & + 27ab^4 & - 4b^5. \end{array}$$

### §. 16.

#### Erklärungen.

1. Eine Größe (Dividend) durch eine andere (Divisor) dividiren, heißt eine Größe (Quotus, Quotient) finden, welche mit der zweiten multiplicirt, die erste wiedergibt. Man betrachtet also das Dividend als ein Product, dessen Factoren der Divisor und der Quotient sind.

2. Ist demnach das Dividend positiv, so erhält der Quotient das Zeichen des Divisors, weil nur Factoren mit gleichen Zeichen ein positives Product geben; ist das Dividend negativ, so erhält der Quotient das entgegengesetzte Zeichen des Divisors, weil nur Factoren mit entgegengesetzten Zeichen ein negatives Product geben.

Z. B. $+12 : +4 = +3$
$+12 : -4 = -3$
$-12 : +4 = -3$
$-12 : -4 = +3$.

Zusatz. Haben Dividend und Divisor gleiche Zeichen, so wird der Quotient positiv; haben erstere ungleiche Zeichen, so wird letzterer negativ.

§. 17.

Erklärungen.

1. Bei Größen von ungleichen Wurzeln (bei Größen, welche mit verschiedenen Buchstaben bezeichnet sind) kann die Division nur angezeigt werden, und dieß geschieht dadurch, daß man Dividend und Divisor in Form von Zähler und Nenner eines Bruches anschreibt. Z. B. $+ a : - b = - \frac{a}{b}$.

2. Sind Dividend und Divisor gleich, so wird der Quotient = 1. Z. B. $a : a = 1$; denn $1 \times a = a$.

3. Ein Product aus zwei oder mehreren Größen wird durch eine Größe dividirt, wenn einer der Factoren des Productes dividirt wird. Z. B. $ab : c = \frac{ab}{c} = \frac{a}{c} . b = a . \frac{b}{c}$.

4. Ist daher das Dividend ein Product von mehreren Größen, und kommt einer oder das Product einiger derselben auch im Divisor vor; so wird der Quotient dadurch bestimmt, daß man die gleichen Größen hinwegläßt.

Z. B. $a^2 b^3 : a^2 = \frac{a^2}{a^2} . b^3 = 1 . b^3 = b^3$

$$a b^2 c : ab^2 d = \frac{ab^2}{ab^2} . \frac{c}{d} = \frac{c}{d}.$$

5. Die Coefficienten werden, aus dem nämlichen Grunde, wie gewöhnliche Zahlen dividirt.

Z. B. $9 a^2 b : 3 a^2 = 3 b$.

6. Potenzen von gleichen Wurzeln werden durch einander dividirt, wenn man den Exponenten des Divisors von dem Exponenten des Dividends subtrahirt.

Z. B. $a^5 : a^3 = a^2$

denn $a^5 : a^3 = \frac{aaaaa}{aaa} = aa = a^2$.

Zusatz 1. Potenzen mit dem Exponenten 0 sind gleich 1; Denn z. B. $a^0 = a^{2-2} = a^2 : a^2 = 1$.

Zusatz 2. Eine Potenz mit negativem Exponenten ist gleich einem Bruche, dessen Zähler 1 und dessen Nenner die nämliche Potenz aber mit positivem Exponenten ist.

Denn z. B. $a^{-2} = a^{1-3} = a : a^3 = \frac{a}{a^3} = \frac{1}{a^2}$.

§. 18.

Aufgabe. Zusammengesetzte Größen zu dividiren.

Auflösung. I. Ist nur das Dividend eine zusammengesetzte Größe, der Divisor aber eine einfache, so dividire man jedes Glied des Dividends durch den Divisor einzeln.

Z. B. $(9a^3b^2 - 6a^2c + 3ab^2 + b^2c) : 3ab^2 = 3a^2 - \frac{2ac}{b^2} + 1 + \frac{c}{3a}$.

II. Ist auch der Divisor eine zusammengesetzte Größe, so ordne man

1) die Glieder des Dividends und Divisors nach den zu- oder abnehmenden Exponenten einer bestimmten Größe (wenn die Glieder nicht bereits in bemerkter Ordnung gegeben sind), und dividire mit dem ersten Gliede des Divisors in das erste Glied des Dividends, um das erste Glied des Quotienten zu erhalten.

2) Dieses Glied schreibe man seitwärts nach einem senkrechten Striche, multiplicire damit den ganzen Divisor, und ziehe das Product vom Dividend ab.

3) Ist das Dividend noch nicht erschöpft, so setze man zum Reste mit Rücksicht auf den Exponenten der der Anordnung zu Grunde gelegten Größe neue Glieder herab, und wiederhole das Verfahren, bis entweder das Dividend ganz erschöpft ist, oder ein nicht weiter theilbarer Rest bleibt, welchen man entweder als solchen bezeichnet, oder zum Quotienten als Zähler eines Bruches schreibt, dessen Nenner der Divisor ist.

Beispiele. I. $(a^2 + 3ab + 2b^2) : (a + b)$.

II. $(a^3 - b^3) : (a - b)$.

III. $(2 - 9x + 14x^2 - 9x^3 + 4x^4) : (1 - 2x + x^2)$.

Berechnung. I.

$$\begin{array}{ll|l} a^2 + 3ab + 2b^2 & & a + 2b \\ (a + b) & & \\ a^2 + ab & & \\ - \quad - & & \\ \hline & 2ab + 2b^2 & \\ & (a + b) & \\ & 2ab + 2b^2 & \\ & - \quad - & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

II.

$$
\begin{array}{l|l}
a^3 - b^3 & a^2 + ab + b^2 \\
(a - b) & \\
a^3 - a^2b & \\
- \quad + & \\
\hline
\quad a^2b - b^3 & \\
\quad (a - b) & \\
\quad a^2b - ab^2 & \\
\quad - \quad + & \\
\hline
\qquad ab^2 - b^3 & \\
\qquad (a - b) & \\
\qquad ab^2 - b^3 & \\
\qquad - \quad + & \\
\hline
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

III.

$$
\begin{array}{l|l}
2 - 9x + 14x^2 - 9x^3 + 4x^4 & 2 - 5x + 2x^2 \\
(1 - 2x + x^2) & \\
2 - 4x + 2x^2 & \\
- \quad + \quad - & \\
\hline
\quad - 5x + 12x^2 - 9x^3 & \\
\quad (1 - 2x + x^2) & \\
\quad - 5x + 10x^2 - 5x^3 & \\
\quad + \quad - \quad + & \\
\hline
\qquad 2x^2 - 4x^3 + 4x^4 & \\
\qquad (1 - 2x + x^2) & \\
\qquad 2x^2 - 4x^3 + 2x^4 & \\
\qquad - \quad + \quad - & \\
\hline
\qquad \text{Rest } + 2x^4. &
\end{array}
$$

Vollständiger Quotient: $2 - 5x + 2x^2 + \frac{2x^4}{1 - 2x + x^2}$.

Zusatz. Hebt sich die Division nicht auf, und setzt man diese doch weiter fort, oder dividirt man eine Größe durch eine mehrtheilige, z. B. eine einfache durch eine zweigliederige, so erhält man zum Quotienten eine Folge von Gliedern, welche nach einem bestimmten Gesetze ohne Ende fortlaufen. Diese Folge heißt man eine unendliche Reihe, und zwar eine abnehmende oder zunehmende, je nachdem die folgenden Glieder kleiner oder oder größer werden, als die vorhergehenden. Die abnehmende Reihe nähert sich dem wahren Werthe des Quotienten

Quotienten immer mehr, je mehr Glieder genommen werden; wird aber nur dann demselben ganz gleich, wenn nach Obigem der Rest als Bruch hinzuaddirt wird. Bei den zunehmenden Reihen findet eine Annäherung nicht Statt.

Beispiele. I. $\frac{a}{a - b.}$ II. $\frac{x}{1 + x.}$

Berechnung. I.

$$\begin{array}{l|l} a & 1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \ldots\ldots \\ (a - b) & \\ - \quad + & \\ \hline \quad b & \\ \quad (a - b) & \\ \quad b - \frac{b^2}{a} & \\ \quad - \quad + & \\ \hline \quad\quad \frac{b^2}{a} & \\ \quad\quad (a - b) & \\ \quad\quad \frac{b^2}{a} - \frac{b^3}{a^2} & \\ \quad\quad - \quad + & \\ \hline \quad\quad\quad \frac{b^3}{a^2}. & \end{array}$$

Diese Reihe ist abnehmend, wenn $b < a$, und dem wahren Werthe von $\frac{a}{a - b}$ desto näher kommend, je mehr Glieder genommen werden, demselben gleich, wenn zu den drei gefundenen Gliedern noch $\frac{\frac{b^3}{a^2}}{a - b} = \frac{b^3}{a^2\,(a - b)}$ addirt wird. Setzt man z. B. $a = 2$, $b = 1$, so ist $\frac{2}{2 - 1} = 2$; die drei ersten Glieder des Quotienten: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \ldots\ldots$ sind $= 1\frac{3}{4}$, die vier ersten $= 1\frac{7}{8}$. Kommt zu erstern der Rest $\frac{1}{4}$ oder zu letztern der Rest $\frac{1}{8}$, so wird der Quotient gleichfalls $= 2$.

II. Von $\frac{x}{1 + x} = x - x^2 + x^3 - x^4 \ldots\ldots$ ist die Reihe zunehmend, wenn $x > 1$, und dem wahren Werthe von $\frac{x}{1 + x}$ nicht annähernd.

## §. 19.

**Aufgabe.** Die Multiplication und Division zu prüfen.

**Auflösung.** I. Die Multiplication prüft man dadurch, daß man mit einem Factor in das Product dividirt, wornach der andere als Quotient erscheinen muß.

II. Die Division prüfet man dadurch, daß man den Quotienten mit dem Divisor multiplicirt, und wenn ein Rest geblieben ist, diesen hinzuaddirt, wornach das Dividend erscheinen muß.

### Beispiele.

I. Probe über Beispiel III. von §. 15.

$$(6a^5 - 13a^4b + 30a^3b^2 - 28a^2b^3 + 27ab^4 - 4b^5)$$
$$:(3a^3 - 2a^2b + 6ab^2 - b^3) = 2a^2 - 3ab + 4b^2.$$

Oder
$$(6a^5 - 13a^4b + 30a^3b^2 - 28a^2b^3 + 27ab^4 - 4b^5)$$
$$:(2a^2 - 3ab + 4b^2) = 3a^3 - 2a^2b + 6ab^2 - b^3.$$

II. Probe über Beispiel III. von §. 18. II.

$$\begin{array}{llllll}
2 & -5x & +2x^2 & & & \\
1 & -2x & +x^2 & & & \\
\hline
2 & -5x & +2x^2 & & & \\
 & -4x & +10x^2 & -4x^3 & & \\
 & & 2x^2 & -5x^3 & +2x^4 & \\
 & & & \text{Rest} & +2x^4 & \\
\hline
2 & -9x & +14x^2 & -9x^3 & +4x^4. &
\end{array}$$

## §. 20.

### Grundsätze.

1. Gleiches mit Gleichem multiplicirt, gibt gleiche Producte; Gleiches durch Gleiches dividirt, gibt gleiche Quotienten.

Wenn $a = b$ und $c = d$, so ist $ac = bd$; $\quad a = b$, $c = d$, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

2. Gleiches mit Ungleichem multiplicirt, gibt ungleiche Producte, und zwar da das größere Product, wo der eine größere Factor ist.

Wenn $a = b$
und $c > d$
so ist $ac > bd$.

3. Gleiches durch Ungleiches, oder Ungleiches durch Gleiches dividirt, gibt ungleiche Quotienten. Man erhält einen um so vielmal größern Quotienten, um wie vielmal das Dividend bei einerlei Divisor größer, oder der Divisor bei einerlei Dividend kleiner ist, und umgekehrt.

Wenn I. $a > b$ und $c = d$, so ist $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$

II. $a = b$, $c > d$, $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$

ist in I. $a = mb$, so ist $\frac{a}{c} = m. \frac{b}{d}$; ist in II. $c = m. d$, so ist $\frac{b}{d} = m. \frac{a}{c}$.

4. Wird daher bei einer angezeigten Division Dividend und Divisor durch die nämliche Zahl multiplicirt oder dividirt, so bleibt der Quotient dem Werthe nach unverändert.

Z. B. $\frac{a}{b} = \frac{a. m}{b. m.} = \frac{a : m}{b : m}$.

§. 21.

Zusätze.

I. Von der Division zusammengesetzter Größen ist das Zerfällen derselben in Factoren nur dadurch verschieden, daß bei ersterer von dem Producte, als welches das Dividend erscheint, der eine Factor schon gegeben ist, und nur der andere gesucht wird, bei letzteren die beiden Factoren erst gesucht werden. Ist hiebei der eine Factor eine einfache Größe, so ist er gleich sichtbar, und der andere (eine zusammengesetzte Größe) wird gefunden, wenn mit dem einfachen Factor in die gegebene Größe dividirt wird. Z. B. bei $3ax^2 + 6bx^3 - 3x$ erscheint $3x$ als Factor aller Glieder, ist also Factor des ganzen Productes; der zweite ist

$$\frac{3ax^2 + 6bx^3 - 3x}{3x} = ax + 2bx^2 - 1, \text{ also}$$

$$3ax^2 + 6bx^3 - 3x = 3x\,(ax + 2bx^2 - 1).$$

Sind beide Factoren zusammengesetzte Größen, so lassen sie sich gewöhnlich nur durch Versuche oder höhere Gleichungen finden. Nur der häufig vorkommende, aus §. 15. Beispiel II. abgeleitete Fall: $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$ werde hier erwähnt.

II. Da ein Bruch nur eine Form der Division ist (§. 3. 1°), so lassen sich die Sätze 3° und 4° des §. 20 auch auf Brüche anwenden, und diese Anwendung gibt die Grundgesetze der Bruchrechnung:

1) Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl
 a) multiplicirt, wenn man damit den Zähler multiplicirt, oder den Nenner dividirt;
 b) dividirt, wenn man damit den Zähler dividirt, oder den Nenner multiplicirt.

2) Der Werth eines Bruches bleibt unverändert, wenn dessen Zähler und Nenner durch die nämliche Zahl multiplicirt oder dividirt werden.

---

# Vierter Artikel.

## Potenziren und Wurzelausziehen.

### A. Im Allgemeinen auf einfache Größen bezogen.

§. 22.

Lehrsätze.

I. Eine Größe erhebt man zu einer Potenz, wenn man sie so oft als Factor setzt, oder so oft weniger einmal mit sich selbst multiplicirt, als der Exponent Einheiten hat. (§. 2. 5° und §. 3. 3°). Darnach ist für die

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zahl | 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8, | 9, | 10 |
| das Quadrat | 1, | 4, | 9, | 16, | 25, | 36, | 49, | 64, | 81, | 100 |
| der Kubus | 1, | 8, | 27, | 64, | 125, | 216, | 343, | 512, | 729, | 1000. |

II. Man potenzirt daher

1) ein Product, wenn man jeden Factor einzeln potenzirt, z. B. $(3ab)^3 = 27a^3b^3$; denn $(3ab)^3 = 3ab \,.\, 3ab \,.\, 3ab = 27a^3b^3$;

2) einen Bruch, wenn man Zähler und Nenner einzeln potenzirt, z. B. $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$; denn $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$;

3) eine Potenz, wenn man die Exponenten mit einander multiplicirt; Z. B. $(a^2)^3 = a^6$; denn $(a^2)^3 = a^2 . a^2 . a^2 = a^{2+2+2} = a^{2 \cdot 3} = a^6$.

II. Eine positive Größe bleibt, zu jeder Würde erhoben, positiv; eine negative Größe aber wird, zu einer Potenz mit geradem Exponenten erhoben, positiv, zu einer Würde mit ungeradem Exponenten erhoben, negativ.

Z. B. $(-a)^2 = + a^2$; denn $(-a)^2 = -a . -a = + a^2$

$(-a)^3 = - a^3$; denn $(-a)^3 = (-a)^2 . - a = + a^2 . - a = - a^3$

$(-a)^4 = + a^4$; denn $(-a)^4 = (-a)^3 . - a = - a^3 . - a = + a^4$.

u. s. f.

Zusatz 1. $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10000$ rc., $10^n$ ist gleich 1 mit n angehängten Nullen, also die kleinste $1 + n$ zifferige Zahl.

Zusatz 2. $\frac{a}{10^n}$ drückt im Allgemeinen einen Decimalbruch aus, daher geht aus $\left(\frac{a}{10^n}\right)^2 = \frac{a^2}{10^{2n}}$ und $\left(\frac{a}{10^n}\right)^3 = \frac{a^3}{10^{3n}}$ hervor, daß man Decimalbrüche wie ganze Zahlen zum Quadrate und Kubus erhebt, jedoch nach der Quadrirung zweimal, nach der Kubirung dreimal so viel Decimalen abzuschneiden hat, als die Wurzel hatte.

## §. 23.

### Erklärungen.

Aus einer Größe die 2te, 3te rc. Wurzel ziehen, heißt eine Größe suchen, welche zur eben so vielten Würde erhoben, die gegebene Größe wieder gibt (§. 2. 6°). Man drückt diese Operation durch das Zeichen $\sqrt{\ }$ und eine in dessen Oeffnung geschriebene Zahl aus, welche den Grad (Exponenten) der Wurzel bezeichnet. Die zweite Wurzel heißt man Quadrat-, die dritte Kubikwurzel. Den Wurzelexponenten 2 läßt man gewöhnlich hinweg. Z. B. $\sqrt{81}$ heißt: es soll die Quadratwurzel aus 81 gezogen, oder eine Zahl gefunden werden, welche zum Quadrate erhoben 81 gibt; daher $\sqrt{81} = 9$, indem $9^2 = 81$ ist; eben so ist $\sqrt[3]{a^3} = a$. Größen, vor welchen ein Wurzelzeichen steht, heißen Wurzelgrößen.

Zusatz. Aus obigem Begriffe ergibt sich: $(\sqrt{a})^2 = a$; $(\sqrt[3]{a})^3 = a$; $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

## §. 24.

### Lehrsätze.

I. Man zieht eine Wurzel

1) aus einem Producte, wenn man sie aus jedem Factor einzeln zieht. Z. B. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; denn $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab$; $\sqrt{50} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$;

2) aus einem Bruche, wenn man sie aus Zähler und Nenner einzeln zieht.

Z. B. $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$; denn $\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}\right)^3 = \frac{(\sqrt[3]{a})^3}{(\sqrt[3]{b})^3} = \frac{a}{b}$.

Ebenso $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$;

3) aus einer Potenz, wenn man den Exponenten der Würde durch den der Wurzel dividirt, entweder wirklich, wenn es möglich ist, oder durch bruchweise Bezeichnung.

Z. B. $\sqrt{a^6} = a^3$, denn $(a^3)^2 = a^6$

$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$, denn $(a^{\frac{2}{3}})^3 = a^{\frac{2}{3} \cdot 3} = a^2$. (§. 22. II. 3°).

4) aus einer Wurzelgröße, wenn man die Wurzelexponenten multiplicirt. Z. B. $\sqrt{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[6]{a}$; denn $\sqrt{\sqrt[3]{a}} = \sqrt{(a^{\frac{1}{3}})}$ $= a^{\frac{1}{3}:2} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$.

II. Eine Wurzel mit geradem Exponenten

1) aus einer positiven Größe gezogen, kann positiv oder negativ seyn. Z. B. $\sqrt{a^4} = \pm a^2$; denn $(\pm a^2)^2 = + a^4$ (§. 22. III.);

2) aus einer negativen Größe kann gar nicht gezogen werden, weil es keine Größe gibt, welche zu einer Würde mit geradem Exponenten erhoben, negativ würde. (§. 22. III.). Man heißt daher solche Größen, z. Beispiel $\sqrt{-a}$, unmögliche, *imaginäre* Größen.

III. Eine Wurzelgröße wird zu einer Würde erhoben, wenn man die Größe hinter dem Wurzelzeichen dazu erhebt.

Z. B. $(\sqrt[3]{a^2})^2 = \sqrt[3]{a^4}$; denn $(\sqrt[3]{a^2})^2 = (a^{\frac{2}{3}})^2 = a^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{a^4}$.

*Zusatz.* Wirklich und vollständig können Wurzeln nur aus Potenzen vom nämlichen Grade und aus Potenzen, in deren Exponent der Wurzelexponent enthalten ist, gezogen werden, aus andern aber nur bezeichnungs- oder annäherungsweise, und zwar

aus einfachen allgemeinen Zahlen nur durch Darstellung als Potenzen mit gebrochenen Exponenten, aus zusammengesetzten allgemeinen und aus besondern Zahlen durch die nämliche Darstellung oder durch Annäherung. Die ersteren Größen, aus welchen nämlich die Wurzeln wirklich und vollständig gezogen werden können, heißen **rationale**, die letzteren **irrationale**.

## B. Rechnungsarten mit Wurzelgrößen.

### §. 25.

**Erklärungen.**

Wurzelgrößen heißen **gleichartig**, wenn die Wurzelexponenten und die Größen hinter dem Wurzelzeichen einander gleich sind; **gleichnamig**, wenn nur die Wurzelexponenten gleich sind. Z. B. $3\sqrt{a^2b}$ und $5\sqrt{a^2b}$ sind gleichartig; $4\sqrt{ab}$, $2\sqrt{a^2b}$, $2\sqrt{c}$ sind zwar gleichnamig, aber nicht gleichartig.

### §. 26.

**Aufgabe.** Wurzelgrößen zu addiren und zu subtrahiren.

**Auflösung.** Auch bei Wurzelgrößen setzen Addition und Subtraction Gleichartigkeit voraus, und werden zunächst nur auf die Coefficienten bezogen, und zwar nach den in §§. 9. und 10. angegebenen Regeln.

**Beispiel der Addition.**

$$\begin{array}{l} 4\sqrt{2} - 5\sqrt{3} + \sqrt[3]{2} + \sqrt{5} \\ 2\sqrt{2} + \sqrt{27}^{*} - \sqrt[3]{2} + \sqrt{6} \qquad {}^{*}\sqrt{27} = \sqrt{9.3} = 3\sqrt{3} \\ \hline 6\sqrt{2} - 2\sqrt{3} \qquad + \sqrt{5} + \sqrt{6}. \end{array}$$

**Beispiel der Subtraction.**

$$\begin{array}{l} 5\sqrt{a} + 3\sqrt{-b} + 2\sqrt{\;c} - 3\sqrt[3]{a} \\ 3\sqrt{a} - \sqrt{-b} + 3\sqrt{-c} + 5\sqrt[3]{a} \\ - \quad + \qquad - \qquad - \\ \hline 2\sqrt{a} + 4\sqrt{-b} + 2\sqrt{c} - 3\sqrt{-c} - 8\sqrt[3]{a}. \end{array}$$

### §. 27.

**Aufgabe.** Wurzelgrößen gleichnamig zu machen.

**Auflösung.** Man verwandle die Wurzelgrößen in Potenzen mit gebrochenen Exponenten, bringe letztere unter einerlei Benennung, und verwandle die Potenzen mit den neuen Exponenten wieder in Wurzelgrößen. Kürzer: man suche eine Zahl,

in welcher die Wurzelexponenten enthalten sind, dividire mit letzteren in die erste, und multiplicire mit jedem Quotienten den dazu gehörigen Exponenten der Wurzel und Würde. (§. 24. II, 3°).

$$\text{Z. B.} \quad \begin{cases} \sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{9}{6}} = \sqrt[6]{a^9} \\ \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{4}{6}} = \sqrt[6]{a^4}, \end{cases}$$

oder da der Wurzelexponent 2 in 6 dreimal, 3 in 6 zweimal enthalten ist, so wird $\sqrt{a^3} = \sqrt[2\cdot3]{a^{3\cdot3}} = \sqrt[6]{a^9}$ und $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3\cdot2]{a^{2\cdot2}} = \sqrt[6]{a^4}$.

Ebenso

$$\begin{cases} \sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3\cdot2]{a^{2\cdot2}b^{1\cdot2}} = \sqrt[6]{a^4b^2}; \\ \sqrt[6]{a^3b^2} = \qquad\qquad \sqrt[6]{a^3b^2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt[6]{a^3b} = \sqrt[6\cdot2]{a^{3\cdot2}b^2} = \sqrt[12]{a^6b^2} \\ \sqrt[4]{a^2b^3} = \sqrt[4\cdot3]{a^{2\cdot3}b^{3\cdot3}} = \sqrt[12]{a^6b^9}. \end{cases}$$

## §. 28.

**Aufgabe.** Wurzelgrößen zu multipliciren und zu dividiren.

**Auflösung.** Man multiplicire oder dividire von den als gleichnamig gegebenen oder gleichnamig gemachten Wurzelgrößen die Größen vor und nach dem Wurzelzeichen. Z. B.

$$3\sqrt[3]{a^2} \times 2\sqrt[3]{a^5} = 6\sqrt[3]{a^7};\ \text{denn}\ 3\sqrt[3]{a^2} \times 2\sqrt[3]{a^5} = 3a^{\frac{2}{3}} \times 2a^{\frac{5}{3}} = 6a^{\frac{7}{3}} = 6\sqrt[3]{a^7}$$

$$6\sqrt[6]{a^4} : 3\sqrt[6]{a^3} = 2\sqrt[6]{a};\ \text{denn}\ 6\sqrt[6]{a^4} : 3\sqrt[6]{a^3} = 6a^{\frac{4}{6}} : 3a^{\frac{3}{6}} = 2a^{\frac{1}{6}} = 2\sqrt[6]{a}.$$

**Zusatz 1.** $(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \times (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b.$ (§. 15. II.)

Ebenso $(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{b + a^2}) \times (\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{b + a^2}) = \frac{1}{4}a^2 - (\frac{1}{2}\sqrt{b + a^2})^2$
$= \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}(b + a^2) = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b - \frac{1}{4}a^2 = -\frac{1}{4}b.$

**Zusatz 2.** Divisions-Beispiele mit einem Divisor aus zwei Gliedern, von welchen eines oder jedes eine Quadratwurzelgröße ist, werden berechnet, indem man sie bruchartig anschreibt und mit einem Bruche multiplicirt, dessen Zähler und Nenner sich vom gegebenen Divisor nur durch das Zeichen des zweiten Gliedes unterscheidet. Z. B.

$$(5\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) : (\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \frac{5\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} =$$

$$\frac{5(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6} - 5\sqrt{6} + 2(\sqrt{2})^2}{3 - 2}\ (\text{Zus. 1.}) = 15 - 7\sqrt{6} + 4 = 19 - 7\sqrt{6}.$$

**Zusatz 3.** Zwei gleichartige unmögliche Größen werden mit einander multiplicirt, indem man eine derselben zum Qua-

drate erhebt; bei zwei ungleichartigen wird die Multiplication nur angezeigt, oder, wenn sie das Quadratwurzelzeichen vor sich haben, wirklich vorgenommen, indem man jede so in Factoren zerfällt, daß einer derselben $\sqrt{-1}$ ist, und dann sie in der angegebenen Art multiplicirt. Z. B.

$$2\sqrt{-a} \times 3\sqrt{-a} = 6(\sqrt{-a})^2 = 6 . -a = -6a$$

$$3\sqrt{-a} \times 4\sqrt{-b} = 12\sqrt{-a}.\sqrt{-b} \text{ oder } = 3\sqrt{a}.\sqrt{-1} \times 4\sqrt{b}.\sqrt{-1} = 12\sqrt{ab}.(\sqrt{-1})^2 = 12\sqrt{ab}.-1 = -12\sqrt{ab}.$$

## C. Quadrat und Quadratwurzel zusammengesetzter Größen.

### §. 28.

Allgemeine Formeln.

I. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$,

d. i., das Quadrat einer zweitheiligen Größe besteht aus dem Quadrat des ersten Theils, dem doppelten Producte des ersten Theils in den zweiten und dem Quadrate des zweiten Theils.

II. In $(a+b+c)^2$ setze man $a+b = p$, so ist

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 = (p+c)^2 &= p^2 + 2pc + c^2 \\ &= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &\quad + 2(a+b)c + c^2,\end{aligned}$$

d. i. bei Quadrirung einer dreitheiligen Größe erhält man zu den Theilen des Quadrates einer zweitheiligen Größe noch das Product aus der Summe der beiden ersten in den dritten Theil und das Quadrat des dritten Theiles.

### §. 29.

Aufgabe. Zwei- und mehrzifferige Zahlen zum Quadrate zu erheben.

Auflösung. Man multiplicire sie mit sich selbst; oder theile sie nach der Dekadik ab, und substituire in die Formeln des §. 28.

Beispiele. Man erhebe die Zahlen 67, 218 zum Quadrate.

**Berechnung.**

Für $(67)^2 = (60+7)^2$ ist

$$\begin{aligned} a &= 60 \\ b &= 7 \\ a^2 &= 60^2 = 3600 \\ 2ab &= 2.60.7 = 840 \\ b^2 &= 7^2 = 49 \\ \hline (67)^2 &= 4489 \end{aligned}$$

Für $(218)^2 = (200+10+8)^2$

ist $a = 200$, $b = 10$, $c = 8$

$$\begin{aligned} a^2 &= 200^2 = 40000 \\ 2ab &= 2.200.10 = 4000 \\ b^2 &= 10^2 = 100 \\ 2(a+b)c &= 2.210.8 = 3360 \\ c^2 &= 8^2 = 64 \\ \hline (218)^2 &= 47524 \end{aligned}$$

Zusatz 1. Das Quadrat der kleinsten zweizifferigen Zahl, d. i. $10^2 = 100$ hat 3, das der größten zweizifferigen Zahl, d. i. $99^2 = 9801$ hat 4 Ziffern; daher kann das Quadrat jeder andern zweizifferigen Zahl auch nur $3 = 2.2 - 1$ oder $4 = 2.2$ Ziffern haben. Das Quadrat der kleinsten dreizifferigen Zahl, d. i. $100^2 = 10000$ hat 5, das der größten dreizifferigen Zahl, d. i. $999^2 = 998001$ hat 6 Ziffern; daher kann das Quadrat jeder andern dreizifferigen Zahl auch nur $5 = 3.2 - 1$ oder $6 = 3.2$ Ziffern haben. In gleicher Art hat das Quadrat einer $n$zifferigen Zahl entweder $2n - 1$ oder $2n$ Ziffern. Theilt man demnach ein solches von der Rechten zur Linken in Klassen von je zwei Ziffern ab; so erhält man eben so viele Klassen als die Wurzeln Ziffern haben, wobei die erste Klasse zwei oder auch nur eine Ziffer haben kann.

Zusatz 2. Bei Quadrirungsbeispielen können die den einzelnen Gliedern anzuhängenden Nullen auch hinweggelassen werden, wenn man zur Bezeichnung des Localwerthes der bedeutsamen Ziffern jedes folgende Glied um eine Stelle weiter zur Rechten rückt. Obige beiden Beispiele stellen sich hiernach, wenn zugleich eine Eintheilung in Klassen von je zwei Ziffern vorgenommen wird, in folgender Art dar:

$$(67)^2 = (60+7)^2$$

$$\begin{array}{rr|l} a^2 = & 36 & \\ 2ab = & 8 & 4 \\ b^2 = & & 49 \\ \hline (67)^2 = & 44 & 89 \end{array}$$

$$(218)^2 = (200+10+8)^2$$

$$\begin{array}{rr|r|l} a^2 = & 4 & & \\ 2ab = & & 4 & \\ b^2 = & & 1 & \\ 2(a+b)c = & & 33 & 6 \\ c^2 = & & & 64 \\ \hline (218)^2 = & 4 & 75 & 24 \end{array}$$

Aus diesen und ähnlichen Beispielen ergibt sich: die letzte Ziffer von $a^2$ reicht bis zur letzten Ziffer der ersten Klasse; die letzte Ziffer von $2ab$ bis zur ersten, von $b^2$ bis zur letzten Ziffer der zweiten Klasse; von $2(a+b)c$ bis zur ersten, von $c^2$ bis zur letzten Ziffer der dritten Klasse. Hat eine zu quadrirende Zahl mehr als 3 Ziffern, so reicht die letzte Ziffer von jedem doppelten Producte der vorausgehenden Ziffern in die nächstfolgende bis zur ersten, das Quadrat der zuletzt genommenen Ziffer bis zur letzten Stelle jeder Klasse.

§. 30.

Aufgabe. Aus drei und mehrzifferigen rationalen und aus irrationalen Quadratzahlen die Quadratwurzel auszuziehen.

Auflösung. I. Für rationale Zahlen.

1) Man theile die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen von je zwei Ziffern, wobei auf die höchste Klasse auch nur eine Ziffer treffen kann.

2) Man suche aus der Tafel des §. 22. das der ersten Klasse gleiche oder nächst niedrige Quadrat, schreibe die Wurzel in Form eines Quotienten seitwärts, und ziehe ihr Quadrat von der ersten Klasse ab.

3) Zum etwaigen Reste schreibe man die nächste Klasse, setze darunter das Doppelte der gefundenen ersten Ziffer der Wurzel als Divisor so, daß die Stelle unter der niedrigsten herabgesetzten Klasse leer bleibt, und dividire damit in die darüberstehende Zahl.

4) Den Quotienten schreibe man als die zweite Ziffer der Wurzel an und zugleich in die leer gelassene Stelle, multiplicire damit den vermehrten Divisor, und ziehe das Product vom Dividend ab.

5) Bleibt kein Rest und ist keine Klasse mehr vorhanden, so ist die Rechnung vollendet. Bleibt aber ein Rest, und sind noch nicht in Rechnung gebrachte Klassen der gegebenen Zahl vorhanden, so setze man

6) zum Reste eine neue Klasse, bestimme den neuen Divisor, indem man die bisher gefundenen Ziffern der Wurzel mit 2 multiplicirt, und wiederhole für diese, so wie für jede folgende Klasse das Nro. 3 und 4 angegebene Verfahren.

Der Beweis ergibt sich aus §. 29.

Beispiele. I.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{\phantom{0}46} & 24 \\ a^2 = 36 & \\ \hline 1024 & \\ 2a + b = \ (128) & \\ 2ab + b^2 = \ 1024 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{cc} a + b \\ 6\ 8 \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{r|l|l|l} \sqrt{\phantom{0}6} & 28 & 00 & 36 \\ a^2 = 4 & & & \\ \hline 228 & & & \\ 2a + b = (45) & & & \\ 2ab + b^2 = 225 & & & \\ \hline 300 & & & \\ 2(a+b) \quad (50) & & & \\ \hline 30036 & & & \\ 2(a+b+c) + d = (5006) & & & \\ 2(a+b+c)\,d + d^2 = 30036 & & & \\ \hline 0 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c} a + b + c + d \\ 2\ 5\ 0\ 6 \end{array}$$

## II. Für irrationale Zahlen.

Ist die gegebene Zahl ein- oder zweizifferig und nicht in der Quadrattafel §. 22. enthalten, oder bleibt nach dem Abziehen des nächst niedrigern (aus einer oder mehrern Klassen bestehenden) Quadrates ein Rest, so ist die Wurzel irrational, und man bestimmt zur Annäherung noch einige Decimalstellen, indem man dem jedesmaligen Reste 2 Nullen anhängt, nach obigen Regeln verfährt, und von der Wurzel so viele Decimalstellen abschneidet, als man Klassen von Nullen anhängt.

Beispiel und Beweis.

$$\sqrt{3} = \sqrt{3 \times \frac{1000000}{1000000}} = \sqrt{\frac{3000000}{1000000}} \quad (\text{§. 24. I. 2})$$

$$= \frac{1732}{1000} = 1{,}732..$$

Ebenso $\sqrt{280} = \sqrt{2|80,|00|00|00} = 16{,}733..$

Aufgaben. 1. Es soll ein quadratförmiger Platz, welcher 21904 □′ groß ist, mit Steinplatten, von welchen jede die Größe

und Gestalt eines Quadratfußes hat, belegt werden. Wieviel kommen in eine Reihe zu liegen?

Antwort: $\sqrt{21904} = 148$.

2. Eine Baumschule ist in Form eines Quadrates angelegt, d. i. mit Bäumchen so besetzt, daß von diesen eben so viele in einer Reihe stehen, als Reihen hinter einander sich befinden. Wenn es nun im Ganzen 339889 Bäumchen sind, wieviel stehen in einer Reihe?

Antwort: $\sqrt{339889} = 583$.

§. 31.

Aufgabe. Aus Zifferbrüchen die Quadratwurzel auszuziehen.

Auflösung. 1) Sind Zähler und Nenner rational, so ziehe man sie aus jedem einzeln aus. (§. 24. I. 2°)

$$\text{Z. B. } \sqrt{\frac{289}{841}} = \frac{\sqrt{289}}{\sqrt{841}} = \frac{17}{29}.$$

2) Ist der Bruch ein Decimalbruch, mit oder ohne Ganze, so zieht man auf die in §. 30. angegebene Art die Wurzel aus, nur muß man vor der Klasseneintheilung die Decimalstellen, wenn sie nicht paarweise gegeben sind, durch Anhängung einer Nulle dazu ergänzen. In der Wurzel schneidet man für jede gegebene Klasse von Decimalen eine Ziffer als Decimale ab.

$$\text{Z. B. } \sqrt{17,850625} = \sqrt{\frac{17850625}{1000000}} = \frac{4225}{1000} = 4,225.$$

$$\sqrt{0,875} = \sqrt{0,|87|50|00|00} = 0,9354..$$

3) Ist der Bruch ein gemeiner Bruch, und sind Zähler und Nenner irrational; so werden entweder

a) diese zuvor mit einer Zahl multiplicirt, wodurch der Nenner rational wird, und dann nach Nro. 1. behandelt, wobei jedoch zu bemerken ist, daß, wenn gemischte Zahlen gegeben sind, diese vor Allem in einen uneigentlichen Bruch zu verwandeln sind; oder es wird

b) der Bruch in einen Decimalbruch verwandelt, und dann aus diesem die Wurzel gezogen.

Beispiele.

I. $\sqrt{\frac{7}{8}} = \sqrt{\frac{7.2}{8.2}} = \sqrt{\frac{14}{16}} = \frac{3,7416574}{4} = 0,9354143$

oder $\sqrt{\frac{7}{8}} = \sqrt{0,875} = 0,9354143.$

II. $\sqrt{7\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{23.3}{3.3}} = \frac{1}{3}\sqrt{69} = \frac{8,3066239}{3} = 2,7688746$

oder $\sqrt{7\frac{2}{3}} = \sqrt{7,666666..} = 2,7688746.$

Aufgabe. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Wassers bei einem Gefälle von 5 bayerschen Fußen?

Lösung. Die Geschwindigkeit c für 1 Secunde bei dem Gefälle h ist ausgedrückt durch die Formel: $c = \sqrt{h.66,7}$; Daher wenn man für h 5 substituirt, so ist $c = \sqrt{5.66,7} = \sqrt{333,5} = 18,26'.. = 1^0 8' 2'' 6'''$ Dec. in 1 Secunde.

§. 32.

Aufgabe. Aus zusammengesetzten allgemeinen Größen die Quadratwurzel zu ziehen.

Auflösung. 1) Man ordne die gegebenen Größen nach der abnehmenden Potenzenreihe einer Größe, wenn sie nicht in der Art geordnet gegeben sind.

2) Vom ersten Gliede suche man die Wurzel (§. 24.), schreibe diese seitwärts, und ziehe ihr Quadrat vom ersten Gliede ab.

3) Man setze die beiden nächsten Glieder herab, und dividire mit dem Doppelten des gefundenen Theiles in das erste herabgesetzte Glied; den Quotienten schreibe man zum ersten Gliede der Wurzel und zum Divisor, und multiplicire damit den so vermehrten Divisor. Das erhaltene Product zieht man dann vom Dividend ab.

4) Bleibt noch ein Rest, oder sind noch gegebene Glieder vorhanden, so setze man diese herab, nehme die gefundenen Theile der Wurzel doppelt, und dividire mit dem erstem Gliede dieses Productes in das erste Glied des Restes. Mit dem Quotienten, welchen man als drittes Glied der Wurzel anschreibt, und zum Divisor setzt, multiplicire man den so vermehrten Divisor, und ziehe das erhaltene Product vom Dividend ab.

5) Bleibt noch ein Rest, so wird das angegebene Verfahren wiederholt.

Beispiele. I. $\sqrt{(25c^2d^2 - 60cd^2e^2 + 36d^2e^4)}$.

II. $\sqrt{(9x^6y^2 - 12x^5y^3 + 28x^4y^4 - 16x^3y^5 + 16x^2y^6)}$.

Berechnung.

I. $\sqrt{(25c^2d^2 - 60cd^2e^2 + 36d^2e^4)}$ | $(a + b)$ $5cd - 6de^2$

$$a^2 = 25c^2d^2$$

$$- 60cd^2e^2 + 36d^2e^4$$

$$2a + b = (10cd - 6de^2$$

$$2ab + b^2 = - 60cd^2e^2 + 36d^2e^4$$

$$+ \quad -$$

$$\emptyset$$

II. $\sqrt{(9x^6y^2 - 12x^5y^3 + 28x^4y^4 - 16x^3y^5 + 16x^2y^6)}$ | $(a + b + c)$ $3x^3y - 2x^2y^2 + 4xy^3$

$$a^2 = 9x^6y^2$$

$$-12x^5y^3 + 28x^4y^4$$

$$2a + b = (6x^3y - 2x^2y^2)$$

$$2ab + b^2 = -12x^5y^3 + 4x^4y^4$$

$$+ \quad -$$

$$24x^4y^4 - 16x^3y^5 + 16x^2y^6$$

$$2(a+b) + c = (6x^3y - 4x^2y^2 + 4xy^3)$$

$$2(a+b)c + c^2 = 24x^4y^4 - 16x^3y^5 + 16x^2y^6$$

$$- \quad + \quad -$$

$$\emptyset$$

## D. Kubus und Kubikwurzel zusammengesetzter Größen.

### §. 33.

Allgemeine Formeln.

I. $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,

d. i. der Kubus einer zweitheiligen Größe besteht aus dem Kubus des ersten Theils, dem dreifachen Producte von dem Quadrate des ersten Theils in den zweiten, dem dreifachen Producte von dem ersten Theile in das Quadrat des zweiten, und aus dem Kubus des zweiten Theils.

II. In $(a+b+c)^3$ setze man $a+b=p$, so ist

$$(a+b+c)^3=(p+c)^3 = p^3 + 3p^2c + 3pc^2 + c^3$$
$$=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$+ 3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3.$$

Man drücke dieß Gesetz mit Worten aus!

§. 34.

Aufgabe. Eine mehrzifferige Zahl zum Kubus zu erheben.

Auflösung. Man theile sie nach der Dekadik in Summanden ab, und substituire in die Formeln des §. 34. Dabei kann man, wie bei dem Erheben einer Zahl zum Quadrate, die am Ende anzuhängenden Nullen hinweglassen, wenn man jedes folgende Glied um eine Zifferstelle weiter zur Rechten rückt.

Z. B. $(345)^3 = (300 + 40 + 5)^3$

$a = 300, b = 40, c = 5$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a^3 =$ | $3^3 =$ | 27 | | |
| $3a^2b =$ | $3.3^2.4 =$ | 10 | 8 | |
| $3ab^2 =$ | $3.3.4^2 =$ | 1 | 44 | |
| $b^3 =$ | $4^3 =$ | | 64 | |
| $3(a+b)^2c =$ | $3.34^2.5 =$ | 1 | 734 | 0 |
| $3(a+b)c^2 =$ | $3.34.5^2 =$ | | 25 | 50 |
| $c^3 =$ | $5^3 =$ | | | 125 |
| | | 41 | 063 | 625 |

Zusatz 1. Da durch ein Verfahren, welches dem in §. 29. Zusatz 1. angegebenen entsprechend ist, gezeigt werden kann, daß der Kubus einer $n$zifferigen Zahl nicht weniger als $3n - 2$ und nicht mehr, als $3n$ Ziffern haben könne; so ergibt sich der Satz: wenn man den Kubus einer Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen von 3 Ziffern abtheilt, so erhält man eben so viele Klassen, als die Wurzel Ziffern hat, wobei die erste Klasse zur Linken 1, 2 oder 3 Ziffern erhalten kann.

Zusatz 2. Aus obigem und jedem andern ähnlichen Beispiele ersieht man: die letzte Ziffer von $a^3$ reicht bis zur letzten Ziffer der ersten Klasse; jedes dreifache Product aus dem Quadrate des ganzen vorausgehenden Theils in den nachfolgenden bis zur ersten, jedes dreifache Product aus dem ganzen voraus-

gehenden

gehenden Theil in das Quadrat des nachfolgenden bis zur zweiten, jeder Kubus des nachfolgenden Theils bis zur dritten Stelle der entsprechenden nachfolgenden Klasse.

§. 35.

Aufgabe. Aus vier- und mehrzifferigen rationalen und aus irrationalen Kubikzahlen die Kubikwurzel zu ziehen.

Auflösung. I. Für rationale Zahlen.

1) Man theile die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen von je drei Ziffern.

2) Man suche aus der Tafel des §. 22. den der ersten Klasse gleichen oder nächst niedrigeren Kubus, schreibe die Wurzel davon in Form eines Quotienten seitwärts, und ziehe jenen Kubus von der ersten Klasse ab.

3) Zum etwa bleibenden Reste schreibe man die zweite Klasse, setze darunter das dreifache Quadrat des gefundenen ersten Theils der Wurzel als Divisor so, daß dessen niedrigste Ziffer unter die höchste der herabgesetzten Klasse zu stehen kommt, und dividire damit die darüberstehende Zahl. Der Quotient ist die zweite Ziffer der Wurzel.

4) Nun bestimme man 3 Producte, nämlich a) das Product aus dem Divisor in den Quotienten, b) das aus dem dreifachen ersten Theile in das Quadrat des zweiten, c) den Kubus des zweiten Theils; schreibe diese so unter einander, daß das erste unter den Divisor zu stehen kommt, jedes folgende um eine Stelle weiter zur Rechten gerückt ist; addire jene Producte, und ziehe ihre Summe von dem darüberstehenden Theile der Kubikzahl ab.

5) Bleibt kein Rest und ist keine Klasse mehr vorhanden, so ist die Rechnung vollendet. Bleibt aber ein Rest, und sind noch nicht in Rechnung gebrachte Klassen der gegebenen Zahl vorhanden, so setze man

6) zum Reste eine neue Klasse, bestimme den neuen Divisor, indem man die bisher gefundenen Ziffern der Wurzeln zum Quadrate erhebt und mit 3 multiplicirt, und wiederhole für diese, so wie für jede folgende Klasse das angegebene Verfahren.

Der Beweis ergibt sich aus §. 34.

Beispiele. I. $\sqrt[3]{39304}$. II. $\sqrt[3]{91185763501}$.

Berechnung. I. $\sqrt[3]{39|304|}$ $\begin{matrix} a + b \\ 3 \quad 4 \end{matrix}$

$$\begin{aligned}
a^3 &= 27 \\
&\overline{12304} \\
3a^2 &= (27) \\
3a^2b &= 108 \\
3ab^2 &= 144 \\
b^3 &= 64 \\
&\overline{12304.} \\
&\overline{0}
\end{aligned}$$

II. $\sqrt[3]{91|185|763|501|}$ $\begin{matrix} a + b + c + d \\ 4 \quad 5 \quad 0 \quad 1 \end{matrix}$

$$\begin{aligned}
a^3 &= 64 \\
&\overline{27185} \\
3a^2 &= (48) \\
3a^2b &= 240 \\
3ab^2 &= 300 \\
b^2 &= 125 \\
&\overline{27125} \\
&\overline{60763} \\
3(a+b)^2 &= (6075) \\
&\overline{60763501} \\
3(a+b+c)^2 &= (607500) \\
3(a+b+c)^2d &= 607500 \\
3(a+b+c)d^2 &= 1350 \\
d^3 &= 1 \\
&\overline{60763501} \\
&\overline{0}
\end{aligned}$$

## II. Für irrationale Zahlen.

Ist die gegebene Zahl ein-, zwei- oder dreizifferig und nicht in der Kubiktafel §. 22. enthalten, oder bleibt nach dem Abziehen des nächst niedrigeren (aus einer oder mehreren Klassen bestehenden) Kubus ein Rest: so ist die Wurzel irrational, und man bestimmt zur Annäherung noch einige Decimalstellen, wenn man dem jedesmaligen Reste eine Klasse von 3 Nullen anhängt, das obige Verfahren anwendet, und in der Wurzel so viele Decimalen abschneidet, als man Klassen von Nullen anhängt.

**Beispiel mit Beweis.**

$$\sqrt[3]{586} = \sqrt[3]{586 \times \frac{1000000000}{1000000000}} = \sqrt[3]{\frac{586000000000}{1000000000}} = \frac{8368}{1000}$$

(§. 24. I. 2º) $= 8,368..$

**Aufgabe.** Es soll eine würfelförmige Kiste von dem Kubikinhalte verfertigt werden, welchen drei andere ähnliche Kisten zusammen haben. Es ist aber die eine 1′ 2″, die zweite 2′, die dritte 2′ 6″ dd hoch. Wie groß muß der Kubikinhalt, wie groß eine Seite der anzufertigenden Kiste werden?

**Lösung.** Kubikinhalt $= (14'')^3 + (24'')^3 + (30'')^3 = 2744^{c''} + 13824^{c''} + 27000^{c''} = 43568^{c''} = 25^{c'}\ 368^{c''}$.

Größe einer Seite $= \sqrt[3]{43568} = 35,18''.. = 2'\ 11''\ 2'''$.

## §. 36.

**Aufgabe.** Aus Zifferbrüchen die Kubikwurzel zu ziehen.

Die **Auflösung** ist der in §. 31. für Ausziehung der Quadratwurzel gegebenen analog; nur mit dem Unterschiede, daß bei Ausziehung der Kubikwurzel immer drei Ziffern eine Klasse bilden, und darnach bei irrationalen Decimalbrüchen die etwa nöthige Ergänzung gemacht werden muß.

**Beispiele.** I. $\sqrt[3]{\frac{8}{15625}} = \frac{2}{25}$.

II. $\sqrt[3]{0,000074088} = 0,042$.

III. $\sqrt[3]{28\tfrac{3}{5}} = \sqrt[3]{\frac{143.25}{5\ .25}} = \tfrac{1}{5}\sqrt[3]{3575} = \frac{15,2909}{5} = 3,0581$,

oder $= \sqrt[3]{28,6} = \sqrt[3]{28,|600|000|000|000} = 3,0581$.

## §. 37.

**Aufgabe.** Aus zusammengesetzten allgemeinen Größen die Kubikwurzel zu ziehen.

**Auflösung.** 1) Man ordne die Glieder nach der abnehmenden Potenzenreihe einer Größe.

2) Bestimme die Kubikwurzel aus dem ersten Gliede, schreibe diese, das a der Formel, seitwärts, und ziehe den Kubus der Wurzel $= a^3$ vom ersten Gliede ab.

3) Nun setze man drei Glieder herab, bilde das $3a^2$ der Formel, dividire damit in das erste herabgesetzte Glied, so wird der Quotient das zweite Glied der Wurzel, das b der Formel, seyn.

4) Aus den gefundenen Gliedern bilde man nun $3a^2b$, $3ab^2$ und $b^3$, und ziehe die Summe dieser Producte vom Dividend ab.

5) Zum etwaigen Reste setze man die folgenden gegebenen Glieder herab, bilde den neuen Divisor $= 3(a + b)^2$, und dividire damit in den Rest; der Quotient ist das c der Formel, wornach man nun $3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3$ bilden und vom Dividend subtrahiren kann. U. s. w.

## Beispiele.

I. $\sqrt[8]{(8c^3 + 36c^2d + 54cd^2 + 27d^3)}$

II. $\sqrt[3]{(8a^9g^3 - 36a^8g^4 + 56a^7g^5 - 33a^6g^6 + \frac{14}{3}a^5g^7 - \frac{1}{4}a^4g^8 + \frac{1}{216}a^3g^9}$.

## Berechnung.

I. $\sqrt[3]{(8c^3 + 36c^2d + 54cd^2 + 27d^3)}$ | $2c + 3d$

$a^3 = 8c^3$

$-$

$36c^2d + 54cd^2 + 27d^3$

$3a^2 = (12c^2)$

$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 36c^2d + 54cd^2 + 27d^3$

$- \quad - \quad -$

0

$$\text{II.}\quad \sqrt[3]{(8a^9g^3 - 36a^8g^4 + 56a^7g^5 - 33a^6g^6 + \tfrac{14}{3}a^5g^7 - \tfrac{1}{4}a^4g^8 + \tfrac{1}{216}a^3g^9} \;\Big|\; 2a^3g - 3a^2g^2 + \tfrac{1}{6}ag^3$$

$$\begin{array}{rl}
a^3 = & 8a^9g^3 \\
 & - \\
\hline
 & -36a^8g^4 + 56a^7g^5 - 33a^6g^6 \\
3a^2 = & (12a^6g^2) \\
3a^2b + 3ab^2 + b^3 = & \begin{array}{c}-\\+\end{array} 36a^8g^4 \begin{array}{c}+\\-\end{array} 54a^7g^5 \begin{array}{c}-\\+\end{array} 27a^6g^6 \\
\hline
 & 2a^7g^5 - 6a^6g^6 + \tfrac{14}{3}a^5g^7 - \tfrac{1}{4}a^4g^8 + \tfrac{1}{216}a^3g^9 \\
3(a+b)^2 = & (12a^6g^2 - 36a^5g^3 + 27a^4g^4) \\
3(a+b)^2c = & 2a^7g^5 - 6a^6g^6 + \tfrac{9}{2}a^5g^7 \\
3(a+b)c^2 = & \qquad\qquad + \tfrac{1}{6}a^5g^7 - \tfrac{1}{4}a^4g^8 \\
c^3 = & \qquad\qquad\qquad\qquad + \tfrac{1}{216}a^3g^9 \\
\hline
- & 2a^7g^5 \begin{array}{c}-\\+\end{array} 6a^6g^6 \begin{array}{c}+\\-\end{array} \tfrac{14}{3}a^5g^7 \begin{array}{c}-\\+\end{array} \tfrac{1}{4}a^4g^8 \begin{array}{c}+\\-\end{array} \tfrac{1}{216}a^3g^9 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

# Zweite Abtheilung.

# Algebra.

## Erster Artikel.

### Allgemeine Erklärungen.

§. 38.

1. Algebra ist die Lehre von den Gleichungen.

2. Gleichung im weiteren Sinne ist der doppelte Ausdruck der nämlichen Größe, durch das Gleichheitszeichen verbunden.

Z. B. $5 + 7 = 3 . 5 - 3$.

Jeden dieser beiden Ausdrücke nennt man Seite, die durch + oder — verbundenen Größen Glieder der Gleichung.

In diesem Sinne ist jede Verbindung von Größen nach den sechs Operationen mit ihrem Resultate eine Gleichung.

2. Gleichung im engern und hier anwendbaren Sinne ist die Gleichstellung zweier verschieden ausgedrückten Beziehungen von unbekannten Größen zu bekannten, um dadurch den Werth der erstern zu bestimmen.

3. Sind jene Beziehungen in Worten ausgedrückt, so bilden sie eine Aufgabe.

4. Die unbekannten Größen drückt man durch die letzten, die bekannten, in wieferne sie als allgemeine Größen betrachtet werden, durch die ersten Buchstaben des lateinischen Alphabets aus.

§. 39.

Man theilt die Gleichungen nach den unbekannten Größen ein:

a) nach deren Anzahl,

1) in Gleichungen mit einer,

2) in Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen;

b) nach deren Exponenten,

1) in einfache Gleichungen, wenn die unbekannte Größe nur in der ersten,

2) in höhere oder zusammengesetzte Gleichungen, wenn die unbekannte in einer höhern Würde vorkommt, und zwar in quadratische, kubische, biquadratische ꝛc., wenn die höchste Würde der unbekannten Größe das Quadrat, der Kubus, das Biquadrat ꝛc. ist. Die höheren Gleichungen theilt man wieder in reine oder unreine, wenn die unbekannte Größe nur in einer oder in verschiedenen Potenzen vorkommt;

c) nach der Zahl ihrer möglichen Werthe,

1) in bestimmte, wenn für die unbekannte Größe nur ein Werth,

2) in unbestimmte, wenn dafür mehrere Werthe möglich sind.

§. 40.

I. Für die Behandlung einer Gleichung unterscheidet man drei Theile:

1) die Formation oder den Ansatz, wodurch die Gleichung aus der Aufgabe abgeleitet, diese durch arithmetische Zeichen ausgedrückt wird;

2) die Reduction oder Einrichtung, wodurch der Gleichung eine einfachere Gestalt gegeben wird, was insbesondere durch Hinwegschaffen der Nenner geschieht;

3) die Solution oder Lösung, wodurch für die unbekannte Größe der den Bedingungen der Aufgabe entsprechende Werth gefunden wird.

II. Für die Formation einer Gleichung lassen sich keine genau bestimmten Gesetze angeben; dieselbe ist mehr von der Beurtheilungskraft, Sachkenntniß und Uebung abhängig. Nur nachstehende allgemeine Regel läßt sich aufstellen:

Man erforsche genau, welches die unbekannte Größe sey, und in welchen Beziehungen sie zu den bekannten Größen stehe, und bringe erstere durch x bezeichnet, mit letzteren in die nämliche Verbindung, in welche man ihren Werth, wenn solcher bekannt wäre, bringen würde, um die Aufgabe zu prüfen.

III. Solution ist der Zweck für die Behandlung einer jeden Gleichung, Reduction nur ein Theil derselben. Gelöst kann aber der Form nach eine Gleichung heißen, wenn auf der einen Seite die unbekannte Größe allein, positiv, mit dem Exponenten und Coefficienten 1 steht, und auf der andern Seite nur bekannte Größen vorkommen.

Damit eine Gleichung die angegebene Form erhalte, müssen mit den einzelnen Größen verschiedene Veränderungen vorgenommen werden. Diese Veränderungen stützen sich aber alle

1) auf den Grundsatz: Gleiches auf gleiche Art (durch gleiche Rechnungsarten) verändert, gibt Gleiches (§. 12. und 20.);

2) auf die Regel: Größen, welche mit andern durch eine der sechs Rechnungsarten verbunden sind, werden von diesen durch die entgegengesetzte Rechnungsart getrennt. (§. 2. II.)

---

# Zweiter Artikel.

## Einfache Gleichungen.

### A. Mit einer unbekannten Größe.

§. 41.

Aufgabe. Einfache Gleichungen mit einer unbekannten Größe zu lösen.

Auflösung. 1. Die durch das Zeichen + oder — mit der unbekannten Größe verbundenen bekannten Größen setze man auf die andere Seite mit veränderten Zeichen. Z. B.

$$\begin{array}{lll} x + 4 = 12 & x - a = b & x - a + b = c \\ \underline{- 4 = - 4} & \underline{+ a = + a} & x = c + a - b \\ x \quad = 12 - 4 = 8 & x \quad = a + b & \end{array}$$

2. Die Coefficienten werden von der Unbekannten (Größe) getrennt, wenn man dadurch die Gleichung dividirt; die Nenner von Brüchen werden hinweggeschafft, wenn man damit die ganze Gleichung multiplicirt. Z. B.

$$3x = 12 \qquad \frac{x}{a} + b = c \qquad \frac{100}{x} = 5$$

$$x = 4 \qquad x + ab = ac \qquad 100 = 5x$$

$$x = ac - ab \qquad 20 = x.$$

3. Kommt die Unbekannte in mehreren Gliedern und auf beiden Seiten vor, so setze man die unbekannten Glieder auf der einen, die bekannten auf der andern Seite zusammen, und addire oder subtrahire die unbekannten Glieder, und zwar wirklich, wenn die Coefficienten der Unbekannten gleichartig sind, oder durch Trennung der Unbekannten als eines gemeinschaftlichen Factors, wenn deren Coefficienten ungleichartig sind. Hierauf dividire man mit der (wirklich oder formell) erhaltenen Summe oder Differenz der Coefficienten die Gleichung. Z. B.

$$3x - 2x + 6 = 48 - 5x \qquad ax + b = cx + a$$

$$3x - 2x + 5x = 48 - 6 \qquad ax - cx = a - b$$

$$6x = 42 \qquad x(a - c) = a - b$$

$$x = 7 \qquad x = \frac{a - b}{a - c}$$

4. Ist die Unbekannte negativ gegeben, so multiplicire man die ganze Gleichung mit $-1$, oder verändere in allen Gliedern die Zeichen. Z. B.

$$a - bx = c \qquad 48 - \tfrac{2}{3}x = 6$$

$$\times -1) \quad -a + bx = -c \qquad - \quad + \quad -$$

$$bx = a - c \qquad \tfrac{2}{3}x = 48 - 6 = 42$$

$$x = \frac{a - c}{b} \qquad 2x = 126$$

$$x = 63$$

5. Ist die unbekannte Größe mit bekannten in Klammern eingeschlossen, so bringe man sie mit den außer diesen stehenden Größen in die angezeigte Verbindung. Z. B.

$$a - b(c - x) = 6a$$

$$a - bc + bx = 6a$$

$$bx = 5a + bc$$

$$x = \frac{5a + bc}{b}$$

§. 42.

Aufgaben für einfache Gleichungen.

1. Wie heißt die Zahl, welche mit ihrer Hälfte, ihrem dritten und vierten Theil die Zahl 125 gibt?

Ansatz. Die Zahl sey x, so ist ihre Hälfte $= \frac{1}{2}x$, ihr dritter Theil $= \frac{1}{3}x$, ihr vierter Theil $= \frac{1}{4}x$; die Gesammtsumme, nämlich die Summe von x und $\frac{1}{2}x$ und $\frac{1}{3}x$ und $\frac{1}{4}x$ soll $= 125$ seyn; mithin

$$x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 125.$$

Lösung. Man addire die vier unbekannten Glieder, indem man sie vorher auf einen gemeinschaftlichen Nenner bringt; dieser ist $= 12$; also

$$\frac{12x + 6x + 4x + 3x}{12} = 125$$

$$\frac{25x}{12} = 125$$

$$25x = 1500$$

$$x = 60$$

2. Es wurden mehrere Pfund Zucker und Kaffee zusammen um 21 fl. 36 kr. gekauft, indem 1 Pf. Zucker 36 kr., 1 Pf. Kaffee 54 kr. kostete, und vom Kaffee 4 Pf. mehr genommen wurden, als vom Zucker. Wieviel waren es Pfund Zucker, wieviel Pfund Kaffee?

Ansatz. Es waren x Pf. Zucker und $x + 4$ Pf. Kaffee; 1 Pf. Zucker kostete 36 kr. $= \frac{3}{5}$ fl., also kosteten x Pf. Zucker $\frac{3}{5}x$ fl.; ein Pf. Kaffee 54 kr. $= \frac{9}{10}$ fl., $x + 4$ Pf. Kaffee kosteten $\frac{9}{10} \times (x + 4)$ fl., und alle Pfund Zucker und Kaffee zusammen $\frac{3}{5}x + \frac{9}{10}(x + 4)$ oder auch nach der Angabe 21 fl. 36 kr. $= \frac{108}{5}$ fl., daher

$$\frac{3}{5}x + \frac{9}{10}(x + 4) = \frac{108}{5}.$$

Lösung. Multiplicirt man die ganze Gleichung mit 10, so ist

$$6x + 9(x + 4) = 216$$

$$6x + 9x + 36 = 216$$

$$15x = 180$$

$$x = 12 \text{ Pf. Zucker,}$$

folglich $12 + 4 = 16$ Pf. Kaffee.

3. Ein Kaufmann hatte ein Stück Tuch auf dem Lager liegen. Würde er eine Elle davon um 6 fl. verkaufen, so gewänne er daran 30 fl.; gäbe er eine Elle um 4 fl., so verlöre er 50 fl. Wieviel Ellen waren es, was kostete eine Elle im Ankaufe?

Ansatz. Es waren x Ellen; diese würden nach der ersten Voraussetzung um 6x fl., nach der zweiten um 4x fl. verkauft.

Also ist nach ersterer der Ankaufspreis, welcher um 30 fl. geringer ist, als der Verkaufspreis, 6x — 30; nach letzterer der um 50 fl. höhere Ankaufspreis 4x + 50. Demnach

$$6x - 30 = 4x + 50$$

Lösung.

$$6x - 4x = 50 + 30$$
$$2x = 80$$
$$x = 40 \text{ Ellen.}$$

Diese würden nach der ersten Voraussetzung um 40 . 6 fl. = 240 verkauft, um einen Preis, welcher um 30 fl. höher wäre, als der Ankaufspreis. Dieser ist also für alle Ellen = 240 — 30 fl. = 210 fl. und für eine Elle = $\frac{210}{40} = 5\frac{1}{4}$ fl. = 5 fl. 15 kr.

4. Es soll unter drei Bauern A, B und C eine Waldung von 8200 □ Fuß so vertheilt werden, daß sich der Antheil des B zu dem des A verhalte, wie 6 : 5, und C zweimal soviel als A erhalte, weniger 200 □′. Wieviel erhält jeder Bauer?

Ansatz. Der Antheil des A sey = x □′, so wird der Antheil b des B durch die Proportion b : x = 6 : 5 bestimmt, $b = \frac{6x}{5}$; der Antheil des C ist 2 . x — 200. Daher

$$x + \frac{6x}{5} + 2x - 200 = 8200$$

Lösung.

$$3x + \frac{6x}{5} = 8400$$
$$\frac{21x}{5} = 8400$$
$$21x = 42000$$
$$x = 2000 \,\square' \text{ Wald., Anth. d. A,}$$

$$\text{Antheil des B} = \frac{6 . 2000}{5} = 2400 \,\square'$$
$$\text{Antheil des C} = 2 . 2000 - 200 = 3800 \,\square'$$
$$8200 \,\square'$$

5. Mittelst eines 2′ 6″ langen Hebels wird an einer Schraube, deren Weite 2″ beträgt, durch eine Kraft einer Last das Gleichgewicht gehalten, welche 95 mal größer ist, als die Kraft weniger 16 ℔. Wie groß sind, ohne Rücksicht auf Reibung, Kraft und Last?

Lösung. An einer Schraube verhält sich im Stande des Gleichgewichts, ohne Rücksicht auf Reibung, Kraft zur Last, wie die Schraubenweite zum Umfange der Spindel, oder wenn die Kraft an derselben nicht unmittelbar, sondern mittelst eines Hebels wirkt, wie die Schraubenweite zum Umfange des Kreises, welchen die Kraft am Hebel bei dessen Bewegung beschreibt. Be-

zeichnet man daher die Kraft mit x, so wird die Last = 95x — 16, der von der Kraft beschriebene Kreis ist = 2. 30″. 3,14 = 188,4″. Daher

$$x : 95x - 16 = 2 : 188,4$$
$$= 1 : 94,2$$
$$94,2x = 95x - 16$$
$$16 = 0,8x$$
$$x = 20 \text{ ℔}$$
$$\text{Last} = 95.20 - 16 = 1884 \text{ ℔}.$$

6. Einem feindlichen Corps, welches täglich a Meilen macht, setzt m Tage später ein anderes Corps, welches täglich b Meilen macht, vom nämlichen Orte aus nach; in wie viel Tagen wird ersteres vom letztern eingeholt werden?

Ansatz. Das zweite Corps marschire, bis es das erste einholt, x Tage, so macht es während dieser Zeit x. b = bx Meilen; das erste Corps ist m Tage länger, im Ganzen m + x Tage unter Wegs, macht also während dieser Zeit (m + x). a = a (m + x) Meilen. Der vom zweiten Corps zurückgelegte Weg muß aber dem vom ersten Corps zurückgelegten gleich seyn. Demnach

$$bx = a(m + x)$$

Lösung.

$$bx = am + ax$$
$$bx - ax = am$$
$$x(b - a) = am$$
$$x = \frac{am}{b - a}$$

Formel der Ambulationsrechnung.

Das erste Corps mache täglich 4, das zweite $5\frac{1}{2}$ Meilen; ersteres sey 3 Tage früher abmarschirt. Hier ist a = 4, b = $5\frac{1}{2}$, m = 3

$$x = \frac{4.\ 3}{5\frac{1}{2} - 4} = \frac{12}{1\frac{1}{2}} = 12 \times \tfrac{2}{3} = 8 \text{ Tagen}.$$

7. Ein Weinwirth hat zweierlei Weine; von dem einen kostet die Maß a, von dem andern b kr. Er will nun aus beiden Sorten eine Mischung von q Maß so machen, daß davon eine Maß c kr. werth ist. Wie viel Maß muß er von jeder Sorte nehmen?

Ansatz. Von der bessern Sorte nehme er x Maß, so werden für die geringere Sorte q — x Maß zu nehmen seyn; die von der bessern Sorte genommenen x Maß sind $x . a = ax$ kr., die von der geringeren Sorte genommenen q — x Maß $(q - x)$ b kr., die ganze Mischung von q Maß ist $q . c$ kr. werth.

Demnach
$$ax + b(q - x) = cq$$

Lösung.
$$ax + bq - bx = cq$$
$$ax - bx = cq - bq$$
$$x(a - b) = cq - bq$$
$$x = \frac{cq - bq}{a - b} = \frac{(c - b)q}{a - b} \text{ Maß}$$

von der bessern Sorte; von der geringeren also $q - x$
$$= q - \frac{cq - bq}{a - b} = \frac{aq - bq - (cq - bq)}{a - b}$$
$$= \frac{aq - bq - cq + bq}{a - b} = \frac{aq - cq}{a - b} = \frac{(a - c)q}{a - b}.$$

Diese Formel liegt dem mechanischen Verfahren bei der Alligationsrechnung zu Grunde.

8. A soll an B nach a Jahren S fl. bezahlen, ohne daß er für die Zwischenzeit Interesse zu zahlen hat. B möchte aber sogleich bezahlt werden; wie viel kann er verlangen, wenn er, wie A, mit dem Capitale p Procent gewinnen kann. Oder: was ist der baare Werth eines nach a Jahren fälligen Capitals von S fl., das Disconto zu p Procent gerechnet.

Ansatz. B erhalte baar x fl., so müssen diese mit den für a Jahre zu p Procent treffenden Zinsen dem wahren Capitale S gleich seyn. Die Zinsen werden berechnet:

| | |
|---|---|
| Zinsen fl. ? | x fl. Capital |
| | a Jahren |
| fl. 100 | |
| J. 1 | p fl. Z. |

$$\text{Fragliche Zinsen} = \frac{apx}{100}$$

$$\text{Daher } x + \frac{apx}{100} = S$$

Lösung.
$$100x + apx = 100\,S$$
$$x(100 + ap) = 100\,S$$
$$x = \frac{100\,S}{100+ap}$$

Formel der Disconto- oder Rabattrechnung mit einfachen Zinsen.

Anwendung. Welches ist der baare Werth eines nach 6 Jahren fälligen Capitals von 5200 fl., das Disconto zu 5% gerechnet? Hier ist

$$a = 6,\ p = 5,\ S = 5200$$
$$x = \frac{100 \times 5200}{100 + 6 \times 5} = \frac{520000}{130} = 4000$$

Mithin Disconto $= 5200 - 4000 = 1200$ fl.

9. Von drei Abtheilungen Arbeiter würde die erste allein eine Arbeit in 9, die zweite in 12, die dritte in 18 Tagen vollenden. Wie lange werden alle drei Abtheilungen, zugleich arbeitend, zu jener Arbeit brauchen?

Ansatz. Man bezeichne die Arbeit mit q, und suche denjenigen Theil dieser Arbeit, welchen jede Abtheilung in der Zeit x verrichten wird.

| Arbeit ? | x Tage Abth. A |
|---|---|
| T. 9 | q Arbeit |

Arbeit von A in x Tagen $= \frac{qx}{9}$ ꝛc.

$$\frac{qx}{9} + \frac{qx}{12} + \frac{xq}{18} = q.$$

Lösung. Die ganze Gleichung durch q dividirt, und dann mit 36 multiplicirt.

$$\frac{x}{9} + \frac{x}{12} + \frac{x}{18} = 1$$
$$4x + 3x + 2x = 36$$
$$9x = 36$$
$$x = 4 \text{ Tage.}$$

10. Ein Kaufmann soll an einen andern nach m Monaten a, nach n Monaten b, nach r Monaten c fl. bezahlen. Wann kann die ganze Schuld ohne Nachtheil des Schuldners und Gläubigers auf einmal bezahlt werden?

Ansatz. Die Zinsen, welche der Schuldner während der x Monate von der Summe der 3 Capitalien beziehen könnte, wenn er sie zu p Procent ausliehe, müssen den Zinsen gleich seyn, welche er von den einzelnen Capitalien während der treffenden Monate nach dem nämlichen Zinsfuße erhalten könnte. Die Zinsen können nach dem reesischen Ansatze berechnet werden:

| | |
|---|---|
| Zinsen ? | (a + b + c) fl. Cap. / x Monate |
| Cap. fl. 100 / Monate 12 | p fl. Z. |

$$\text{Zinsen} = \frac{(a + b + c)px}{1200} \text{ u. s. f.}$$

$$\frac{(a + b + c)px}{1200} = \frac{amp}{1200} + \frac{bnp}{1200} + \frac{cnp}{1200}$$

Lösung. Die ganze Gleichung durch p dividirt, und mit 1200 multiplicirt!

$$(a + b + c)x = am + bn + cr$$

$$x = \frac{am + bn + cr}{a + b + c}$$

Formel der Terminrechnung.

11. A soll dem B 12000 fl. baar bezahlen, wünscht aber diese Schuld in 3 Terminen, nämlich 2, 4 und 6 Jahren zu gleichen Theilen abzutragen. Wie viel beträgt ein Termingeld, zu 5% gerechnet?

Ansatz. Die einzelnen Termingelder und die Zinsen, welche der Gläubiger von denselben bekäme, wenn er sie sogleich nach ihrem Empfange bis zur Verfallzeit des letzten Termingeldes ausliehe, müssen so viel betragen, als das ursprüngliche Capital sammt den Zinsen, welche er von letzterem von jetzt an bis zur Auszahlung des letzten Termingeldes erhalten könnte. Nun kann der Gläubiger das nach 2 Jahren zu zahlende Termingeld x noch 6 — 2 = 4 Jahre, das nach 4 Jahren fällige noch 6 — 4 = 2 Jahre; das ganze Capital könnte er 6 Jahre lang ausleihen. Daher die Zinsen vom ersten Termingelde $= \frac{x.4.5}{100}$, vom zweiten $= \frac{x.2.5}{100}$, vom dritten = 0, vom ganzen Capitale $= \frac{12000.6.5}{100}$;

Demnach

$$\left(x + \frac{x.4.5}{100}\right) + \left(x + \frac{x.2.5}{100}\right) + x = 12000 + \frac{12000.6.5}{100}$$

Lösung. $3x + \frac{3x}{10} = 12000 + 3600$

$$\frac{33x}{10} = 15600$$

$$x = \frac{156000}{33} = 4727\tfrac{3}{11} \text{ fl.}$$

## B. Bestimmte Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

### §. 43.

Erklärung. Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen sind bestimmt, wenn so viele von einander verschiedene Gleichungen gegeben sind, oder aus den Bedingungen einer Aufgabe abgeleitet werden können, als darin unbekannte Größen vorkommen.

### §. 44.

Aufgabe. Gleichungen mit zwei unbekannten Größen zu lösen.

Auflösung. Man suche (nach §. 41.) aus jeder der beiden Gleichungen für die nämliche unbekannte Größe einen Ausdruck, welcher nur bekannte Größen und die zweite Unbekannte enthält, und stelle diese beiden Ausdrücke in einer Gleichung zusammen. Da nun letztere nur mehr eine Unbekannte enthalten wird, so kann man für diese nach §. 41. einen Werth suchen. Wenn man dann den gefundenen Werth in einen der beiden bemerkten Ausdrücke substituirt, so erhält man auch für die erste unbekannte Größe einen bestimmten Werth. Diese Auflösungsart heißt man Comparation.

Anmerkung. Ueber die Auflösung durch Substitution und Elimination mündlich!

Beispiele.

## Beispiele.

I. $2x - 4 = 2y - 8$ | $2x + 8 = 3y - 1$

$2x = 2y - 4$ | $2x = 3y - 9$

$x = \frac{2y - 4}{2} = y - 2$ | $x = \frac{3y - 9}{2}$

$$y - 2 = \frac{3y - 9}{2}$$

$$2y - 4 = 3y - 9$$

$$y = 5.$$

Setzt man diesen Werth von y in Gleichung $x = y - 2$ an die Stelle von y, so ist $x = 5 - 2 = 3$.

II. $2ax - b = by$ | $ax - cy = b$

$2ax = by + b$ | $ax = b + cy$

$x = \frac{by + b}{2a}$ | $x = \frac{b + cy}{a}$

$$\frac{by + b}{2a} = \frac{b + cy}{a}$$

$$by + b = 2b + 2cy$$

$$by - 2cy = 2b - b$$

$$y(b - 2c) = b$$

$$y = \frac{b}{b - 2c}$$

$$x = \frac{b + \frac{c.b}{b-2c}}{a} = \frac{b^2 - 2bc + bc}{b - 2c} : a = \frac{b^2 - bc}{ab - 2ac} = \frac{b(b - c)}{a(b - 2c)}$$

### §. 45.

### Aufgaben für Gleichungen mit zwei Unbekannten.

1. Ein Spängler hat zwei rechteckig geschnittene Blechplatten; von der zweiten ist die Länge um 1′ kleiner, und der Flächeninhalt um 5 □′ größer, als von der ersten; die Breite der ersten beträgt 6′, der zweiten 7′. Wie groß sind Flächeninhalt und Länge einer jeden?

Ansatz. Der Flächeninhalt der ersten Platte sey $= x$ □′, so ist der der zweiten $= x + 5$; die Länge der ersten $= y$, so ist die der zweiten $= y - 1$. Die Höhe (Breite) eines Rechtecks ist gleich dem Quotienten aus der Grundlinie (Länge) in den Flächeninhalt. Daher

Lösung.

$$\frac{x}{y} = 6 \qquad\qquad \frac{x + 5}{y - 1} = 7$$

$$x = 6y \qquad\qquad x + 5 = 7y - 7$$

$$x = 7y - 12$$

$$7y - 12 = 6y$$

$$y = 12'$$

$$x = 12 . 6 = 72 \square'.$$

Von der zweiten Platte ist der Inhalt $= 72 + 5 = 77 \square'$, die Länge $= 12 - 1 = 11'$.

2. Ein Handelsmann mußte für 2 Stücke Tuch zusammen 242 fl. bezahlen, indem eine Elle vom ersten 4 fl., vom zweiten 5 fl. kostete. Nach einiger Zeit hatte er das erste Stück bis auf 3 Ellen, eine Elle um 4 fl. 48 kr., und das zweite bis auf 5 Ellen, eine Elle um 5 fl. 36 kr. verkauft, und damit seine Auslage bis auf 6 fl. gedeckt. Wie viel Ellen hielt jedes Stück? Wie viel gewinnt der Handelsmann im Ganzen, wenn er die Reste gleichfalls zu den angegebenen Preisen verkauft?

Ansatz. Es wurden vom ersten Stücke x Ellen um 4x fl. gekauft und x — 3 Ellen um $(x - 3)\ 4\frac{4}{5}$ fl. verkauft, vom zweiten Stücke y Ellen um 5y fl. gekauft und x — 5 Ellen um $(y - 5) . 5\frac{3}{5}$ fl. gekauft, für beides 242 — 6 = 236 fl. eingenommen. Daher

$$4x + 5y = 242 \qquad\qquad (x - 3).\tfrac{24}{5} + (y - 5).\tfrac{28}{5} = 236$$

Lösung.

$$4x = 242 - 5y \qquad\qquad \frac{24x - 72}{5} + \frac{28y - 140}{5} = 236$$

$$x = \frac{242 - 5y}{4} \qquad\qquad 24x + 28y - 212 = 1180$$

$$x = \frac{1392 - 28y}{24} = \frac{348 - 7y}{6}$$

$$\frac{242 - 5y}{\not{4}\,2} = \frac{348 - 7y}{\not{6}\,3}$$

$$726 - 15y = 696 - 14y$$

$$y = 30 \text{ Ellen}$$

$$x = \frac{242 - 5 . 30}{4} = 23 \text{ Ellen.}$$

Bei dem ersten Stücke gewann er an einer Elle 4 fl. 48 kr. — 4 fl. = 48 kr., also an 23 Ellen 48 . 23 kr. = 18 fl. 24 kr., bei dem zweiten an einer Elle 5 fl. 36 kr. — 5 fl. = 36 kr., also bei 30 Ellen 36 . 30 kr. = 18 fl. und im Ganzen 36 fl. 24 kr.

3. Hier verhielt sich vor einiger Zeit der Preis des Weizens zu dem des Roggens wie 4 zu 3, in München, wo ein Scheffel Weizen um 1 fl. 45 kr., ein Scheffel Roggen um 1 fl. 48 kr. theurer war, wie 5:4. Wie theuer war hier ein Scheffel von jeder Getreidart?

Ansatz. Ein Scheffel Weizen kostete hier x, in München $(x+\frac{7}{4})$ fl.; ein Scheffel Roggen hier y, in München $(y+1\frac{4}{5})$ fl., Daher:

Lösung.

$$x : y = 4 : 3 \qquad\qquad (x+\tfrac{7}{4}):(y+\tfrac{9}{5}) = 5 : 4$$
$$3x = 4y \qquad\qquad 4x + 7 = 5y + 9$$
$$x = \frac{4y}{3} \qquad\qquad x = \frac{5y+2}{4}$$

$$\frac{4y}{3} = \frac{5y+2}{4}$$
$$16y = 15y + 6$$
$$y = 6 \text{ fl.}$$
$$x = \frac{4 \cdot 6}{3} = 8 \text{ fl.}$$

4. Ein Stirnrad macht 4 Umläufe, während ein davon bewegter Trilling 45 Umläufe macht. Hätte ersteres 6 Zähne mehr, letzteres 1 Triebstock mehr, so würde der Trilling 32 Umläufe machen, während das Stirnrad 3 Umläufe macht. Wie viel Zähne hat das Rad, wie viel Triebstöcke der Trilling.

Ansatz. Das Stirnrad hat x Zähne, der Trilling y Triebstöcke; nach der zweiten Voraussetzung hätte ersteres x + 6 Zähne, letzterer y + 1 Triebstöcke. Es stehen aber die Zahlen der Zähne eines Rades und der Triebstöcke eines Trillings im verkehrten Verhältnisse ihrer Umläufe. Daher

Lösung.

$$x : y = 45 : 4 \qquad\qquad x + 6 : y + 1 = 32 : 3$$
$$4x = 45y \qquad\qquad 3x + 18 = 32y + 32$$
$$x = \frac{45y}{4} \qquad\qquad x = \frac{32y+14}{3}$$

$$\frac{45y}{4} = \frac{32y+14}{3}$$
$$135y = 128y + 56$$
$$y = 8 \text{ Triebstöcke}$$
$$x = \frac{45 \cdot 8}{4} = 90 \text{ Zähne.}$$

5. Ein aus Zinn und Blei zusammengeschmolzener Klumpen von 42 Pfunden verliert im Wasser gewogen $4\frac{1}{2}$ Pf.; wie viel Pfund Zinn und Blei befinden sich darin, da nahe zu 36 Pf. Zinn im Wasser 5 Pf. und 12 Pf. Blei 1 Pf. verlieren?

Ansatz. Vom Zinn seyen x, vom Blei y Pfunde in dem Klumpen, daher $x + y = 42$.

Nun suche man den Verlust Z der x Pfunde Zinn und den Verlust B der y Pfunde Blei im Wasser durch die Proportionen:

$$36 : x = 5 : Z = \frac{5x}{36}$$

$$12 : y = 1 : B = \frac{y}{12}$$

Diese beiden Verluste müssen dem Verluste des ganzen Körpers gleich seyn. Demnach

$$\frac{5x}{36} + \frac{y}{12} = 4\tfrac{1}{2}$$

Lösung. $x + y = 42$

$$x = 42 - y$$

$$\frac{5x}{36} + \frac{y}{12} = 4\tfrac{1}{2} \quad (\times 36$$

$$5x + 3y = 162$$

$$x = \frac{162 - 3y}{5}$$

$$42 - y = \frac{162 - 3y}{5}$$

$$210 - 5y = 162 - 3y$$

$$y = 24 \text{ Pf. Blei}$$

$$x = 42 - 24 = 18 \text{ Pf. Zinn.}$$

§. 46.

Aufgabe. Gleichungen mit drei und mehreren unbekannten Größen zu lösen.

Auflösung. Kommen in jeder von den drei gegebenen Gleichungen die drei unbekannten Größen vor, so suche man aus jeder Gleichung einen Ausdruck für die nämliche unbekannte Größe, und stelle den ersten mit dem zweiten und den dritten mit dem ersten oder zweiten in einer Gleichung zusammen, so erhält man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, welche man auf die in §. 44. angegebene Art auflöst.

Kommt eine hinwegzuschaffende Unbekannte nur in zwei der gegebenen drei Gleichungen vor, so suche man für dieselbe

aus jenen zwei Gleichungen Ausdrücke, und stelle sie in einer Gleichung zusammen, welche dann auch nur die zwei in der dritten Gleichung vorkommenden zwei Unbekannten enthalten wird.

Vier Gleichungen mit vier Unbekannten löst man auf, indem man sie in ähnlicher Art auf drei Gleichungen mit drei Unbekannten, diese auf zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, und letztre endlich auf eine Gleichung mit einer Unbekannten bringt, u. s. w.

## Beispiele.

I. $2x + 3y + 5z = 77$ | $2x - 3y + 19 = 2z$ | $3x - 2z + 18 = 4y$

$x = \frac{77 - 3y - 5z}{2}$ | $x = \frac{2z + 3y - 19}{2}$ | $x = \frac{4y + 2z - 18}{3}$

$$\frac{77 - 3y - 5z}{2} = \frac{2z + 3y - 19}{2} \qquad \frac{2z + 3y - 19}{2} = \frac{4y + 2z - 18}{3}$$

$$y = \frac{96 - 7z}{6} \qquad y = 21 - 2z$$

$$\frac{96 - 7z}{6} = 21 - 2z$$

$$z = 6$$

In vorstehende Ausdrücke von y und x substituirt!

$$y = 21 - 2.6 = 9; \quad x = \frac{2.6 + 3.9 - 19}{2} = 10.$$

II. $3x - 2y = 6$ | $4x - 4z = z$ | $\frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z = 8$

$x = \frac{2y + 6}{3}$ | $x = \frac{5z}{4}$ | $2y + 3z = 48$

$$\frac{2y + 6}{3} = \frac{5z}{4}$$

$$y = \frac{15z - 24}{8} \qquad y = \frac{48 - 3z}{2}$$

$$\frac{15z - 24}{84} = \frac{48 - 3z}{2}$$

$$z = 8$$

$$y = \frac{48 - 3.8}{2} = 12; \quad x = \frac{5.8}{4} = 10.$$

## §. 47.

### Aufgaben für Gleichungen mit drei und vier unbekannten Größen.

1. Bei einem Baue waren Zimmerleute, Maurer und Handlanger, im Ganzen 56 Personen, beschäftigt; der Taglohn von allen diesen betrug 25 fl. 4 kr.; indem ein Zimmermann 36 kr., ein Maurer 32 kr. und ein Handlanger 18 kr. erhielt; deßhalb betrug der Taglohn der Maurer um 3 fl. 28 kr. mehr, als der der Zimmerleute. Wie viel Zimmerleute, Maurer und Handlanger waren es?

Ansatz. Es waren x Zimmerleute, y Maurer, z Handlanger; deren Taglohn nach der Reihe 36x, 32y, 18z kr. betrug. Daher

$$x + y + z = 56$$

Lösung.

$$x = 56 - y - z$$

$$36x + 32y + 18z = 1504$$

$$x = \frac{752 - 16y - 9z}{18}$$

$$36x + 208 = 32y$$

$$x = \frac{8y - 52}{9}$$

$$56 - y - z = \frac{752 - 16y - 9z}{18}$$

$$y = \frac{256 - 9z}{2}$$

$$56 - y - z = \frac{8y - 52}{9}$$

$$y = \frac{556 - 9z}{17}$$

$$\frac{256 - 9z}{2} = \frac{556 - 9z}{17}$$

$z = 24$ Handlanger

$y = \frac{256 - 9.24}{2} = 20$ Maur.; $x = 56 - 20 - 24 = 12$ Zimmerl.

2. An einem physischen Hebel erster Art, einer durchaus gleich dichten prismatischen Stange, halten sich zwei Kräfte das Gleichgewicht, welche sammt dem Gewichte des Hebels zusammen 150 Pfund betragen; der ganze Hebel ist 12 Fuß lang, die Last vom Unterstützungspuncte 2 Fuß entfernt; die Last beträgt das Siebenfache der Kraft weniger 20 Pfund. Wie groß ist das Gewicht des Hebels, die Kraft und die Last?

Ansatz. Werden Gewicht, Kraft und Last mit g, p und q bezeichnet, so ist das Moment der Last $= 2q$; das der Kraft $= 10p$, da diese $12 - 2'$, vom Unterstützungspuncte entfernt ist;

das Moment der Schwere des Hebels $= 4g$, indem der Schwerpunct in die Mitte der Stange, also $6'$ von der Last und $6 - 2' = 4'$ vom Unterstützungspuncte entfernt ist. Es ist aber am physischen Hebel das Moment der Schwere (Product aus der Schwere in die Entfernung des Schwerpunctes vom Unterstützungspuncte) sammt dem Momente der auf der nämlichen Seite des Hebels wirkenden Kraft gleich dem Momente der Last. Daher

$$p + q + g = 150 \quad \Big| \quad 10p + 4g = 2q \quad \Big| \quad q = 7p - 20$$

Lösung. $q = 150 - p - g \quad \Big| \quad q = 5p + 2g$

$$150 - p - g = 5p + 2g \quad \Big| \quad 5p + 2g = 7p - 20$$

$$p = \frac{150 - 3g}{6} = \frac{50 - g}{2} \quad \Big| \quad p = 10 + g$$

$$\frac{50 - g}{2} = 10 + g$$

$$g = 10 \text{ ℔.}$$

$$p = 10 + 10 = 20 \text{ ℔.}; \quad q = 7 \,.\, 20 - 20 = 120 \text{ ℔.}$$

3. Zu einer Arbeit können drei ähnliche Maschinen benützt werden; mit der ersten und zweiten könnte die Arbeit in 12, mit der zweiten und dritten in 6, mit der ersten und dritten in $6\frac{2}{3}$ Tagen vollendet werden. Wie lange braucht man mit jeder einzeln, wie lange, wenn alle drei zusammen angewendet werden?

Ansatz. Mit der ersten Maschine allein brauche man $x$, mit der zweiten $y$, mit der dritten $z$ Tage. Man bestimme nun, wie viel von der Arbeit $q$ die erste allein und die zweite allein in 12 Tagen leisten könne, nach dem Ansatze:

| Arbeit ? | 12 T. I. Maschine | Arb. ? | 12 T. II. Masch. |
|---|---|---|---|
| T. x | q Arb. | T. y | q Arb. |

Arb. v. I. $= \frac{12q}{x}$ Arb. v. II. $= \frac{12q}{y}$

Daher $\frac{12q}{x} + \frac{12q}{y} = q$

Ebenso $\frac{6q}{y} + \frac{6q}{z} = q$ und $\frac{6\frac{2}{3}q}{x} + \frac{6\frac{2}{3}q}{z} = q$

Lösung. $\frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1$ | $\frac{6}{y} + \frac{6}{z} = 1$ | $\frac{20}{3x} + \frac{20}{3z} = 1$

$12y + 12x = xy$ | $6z + 6y = yz$ | $20z + 20x = 3xz$

$12y = x(y - 12)$ | $6z = y(z - 6)$ | $20z = x(3z - 20)$

$x = \frac{12y}{y - 12}$ | $y = \frac{6z}{z - 6}$ | $x = \frac{20z}{3z - 20}$

$$\frac{12y}{y - 12} = \frac{20z}{3z - 20}$$

Durch 4 die Zähler dividirt und die Nenner hinweggeschafft,

$$9yz - 60y = 5yz - 60z$$

$$y = \frac{60z}{60 - 4z} = \frac{15z}{15 - z}$$

$$\frac{15z}{15 - z} = \frac{6z}{z - 6} \quad (: 3z$$

$$\frac{5}{15 - z} = \frac{2}{z - 6}$$

$$z = 8\tfrac{4}{7} \text{ Tage}$$

$$y = 20, \; x = 30 \text{ Tage.}$$

Mit allen drei Maschinen würde die Arbeit in v Tagen vollendet; dann wird wie in der neunten Aufgabe §. 42.:

$$\frac{v}{30} + \frac{v}{20} + \frac{v}{8\frac{4}{7}} = 1$$

woraus $v = 5$ Tagen.

4. Es wurde ein Capital von 34481 fl. auf 4 Jahre zu 5 % so ausgeliehen, daß jedes Jahr an Capital und Interesse zusammen gleichviel bezahlt werden mußte. Wie viel mußte jedes Jahr vom Capitale abgetragen werden?

Ansatz. Es werde das ganze Capital mit a, der am Ende des ersten, zweiten, dritten, vierten Jahres zurück zu bezahlende Theil desselben mit v, x, y, z bezeichnet. Für das erste Jahr ist dann das zu verzinsende Capital a, für das zweite $a - v$, für das dritte $a - v - x$, für das vierte $a - v - x - y$; die Zinsen I. $\frac{a.5}{100} = \frac{a}{20}$, II. $\frac{a - v}{20}$, III. $\frac{a - v - x}{20}$, IV. $\frac{a - v - x - y}{20}$.

Daher die Gleichungen:

$$\begin{array}{ll|l} \text{I.} & v+x+y+z=a & v=a-x-y-z \\ \text{II.} & v+\frac{a}{20}=x+\frac{a-v}{20} & v=\frac{20x}{21} \\ \text{III.} & v+\frac{a}{20}=y+\frac{a-v-x}{20} & v=\frac{20y-x}{21} \\ \text{IV.} & v+\frac{a}{20}=z+\frac{a-v-x-y}{20} & v=\frac{20z-x-y}{21} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l} a-x-y-z=\frac{20x}{21} & \frac{20x}{21}=\frac{20y-x}{21} & \frac{20x}{21}=\frac{20z-x-y}{21} \\ x=\frac{21a-21y-21z}{41} & x=\frac{20y}{21} & x=\frac{20z-y}{21} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \frac{21a-21y-21z}{41}=\frac{20y}{21} & \frac{20y}{21}=\frac{20z-y}{21} \\ y=\frac{441a-441z}{1261} & y=\frac{20z}{21} \end{array}$$

$$\frac{441a-441z}{1261}=\frac{20z}{21}$$

$$z=\frac{9261a}{34481}=\frac{9261\,.\,34481}{34481}=9261 \text{ fl.}$$

$$y=8820 \text{ fl.},\quad x=8400 \text{ fl.},\quad v=8000 \text{ fl.}$$

## C. Unbestimmte Gleichungen.

### §. 48.

### Erklärungen.

1. Gleichungen heißen unbestimmt, wenn für jede unbekannte Größe in denselben mehrere Werthe möglich sind. Dieß ist der Fall, wenn darin mehr unbekannte Größen vorkommen, als von einander verschiedene Gleichungen gegeben sind, oder aus der Aufgabe gebildet werden können.

2. Die Anzahl der Werthe, welche ohne besondere Beschränkungen meistens unendlich groß wäre, wird gewöhnlich durch die Bedingung, daß dieselben ganze und positive Zahlen seyen, beschränkt, bleibt aber häufig auch bei jener Bedingung unendlich groß.

3. Es werden hier unterschieden

I. Aufgaben mit einer Gleichung und zwei Unbekannten, und zwar letztere a) ohne und b) mit Coefficienten;

II. Aufgaben mit zwei Gleichungen und mehreren Unbekannten.

§. 49.

**Aufgabe.** Aufgaben für eine Gleichung mit zwei, ohne Coefficienten gegebenen unbekannten Größen zu lösen.

**Auflösung.** Man suche für eine Unbekannte einen Ausdruck, und substituire in diesem für die andere Unbekannte ganze positive Zahlen, welche ganz willkührlich sind, wenn im bemerkten Ausdrucke die Unbekannte mit Bekannten durch Addition und Multiplication verbunden ist, bei der Verbindung durch Subtraction nur durch die Rücksicht auf das Positivwerden des Ausdruckes, bei der Verbindung durch Division nur durch die Rücksicht auf die Theilbarkeit der Bekannten beschränkt ist. Z. B. in

$x - y = 12; \; x = 12 + y$

und $\frac{x}{y} = 3; \; x = 3y$

kann für jede y jede beliebige ganze positive Zahl;

in $x + y = 60; \; x = 60 - y$, jede Zahl, welche $< 60$,

in $xy = 100; \; x = \frac{100}{y}$, jede in 100 enthaltene Zahl gesetzt werden.

**Aufgabe.** Es soll ein Kammrad mit einem Trilling so verbunden werden, daß dieser während eines einmaligen Umlaufes des Kammrades 8 Umläufe vollende. Wie viel kann ersteres Kämme, wie viel letzteres Triebstöcke haben?

**Ansatz.** Es sey die Anzahl der Kämme $= x$, die der Triebstöcke $= y$, so ist $\frac{x}{y} = 8$

**Auflösung.** $x = 8y$

Gibt man dem Trilling 5, 6, 7, 8, 9 . . . . . . Triebstöcke
so erhält das Rad 40, 48, 56, 64, 72 . . . . . Kämme.

§. 50.

**Aufgabe.** Zu prüfen, ob eine Gleichung mit zwei Unbekannten, welche mit Coefficienten verbunden sind, nach Ganzen lösbar sey.

**Auflösung.** Man sehe, ob in $ax \pm by = c$, der allgemeinen Form, auf welche jede Gleichung mit zwei Unbekannten gebracht werden kann, nicht etwa a und b, die Coefficienten von x und y, einen Factor gemein haben, welcher in dem bekannten Gliede c nicht enthalten ist. Ist dieses der Fall, so kann die Aufgabe nicht nach Ganzen gelöst werden.

Beweis. Gesetzt, es sey r ein solcher Factor, und in a mmal, in b nmal enthalten, so ist

$$mx \pm ny = \frac{c}{r}$$

was nur dann möglich ist, wenn x oder y, oder beide, Brüche sind.

Beispiel. $6x + 9y = 124$
ist nach Ganzen nicht lösbar, weil 6 und 9 den Factor 3 gemein haben, und dieser nicht auch in 124 enthalten ist.

## §. 51.

Aufgabe. Gleichungen von der Form $ax \pm by = c$ zu lösen.

Auflösung. I. Ist der Coefficient von x (oder y) im bekannten Gliede enthalten, so bestimme man $x = \frac{c \mp by}{a}$, dividire mit a in c, und setze dann $y = au$, worin statt u jede ganze Zahl gesetzt werden kann.

Beispiel. Es wurden in einem Gießhause 8 und 12 pfündige Kanonenkugeln gegossen; zu ersteren braucht man 32 Pfund Metall mehr, als zu letzteren. Wie viel Kanonenkugeln wurden von jeder Gattung gegossen?

Ansatz. Die x Achtpfündner wiegen 8x Pf., die y Zwölfpfünder wiegen 12y Pf., also

$$8x - 32 = 12y$$

Lösung.

$$8x - 12y = 32$$

$$2x - 3y = 8 \quad (:4$$

$$x = \frac{8 + 3y}{2} = 4 + \frac{3y}{2}$$

Setzt man $y = 2u$, so ist $x = 4 + \frac{3 \cdot 2u}{2} = 4 + 3u$

| | | |
|---|---|---|
| Für u = | 1, 2, 3, 4 .......... | unendlich |
| ist y = | 2, 4, 6, 8 .......... | viele |
| und x = | 7, 10, 13, 16 .......... | Werthe. |

II. Sind a, b und c Ganze und Primzahlen unter sich, so werden die Gleichungen durch (Kettenbrüche, Weigl II. Th. 3. Aufl. §. 194. und) fortgesetzte Division berechnet, wie dieß aus nachstehenden Beispielen erhellen wird. Hiebei ist zu bemerken,

daß gewöhnlich bei Gleichungen von der Form $ax - by = c$ unendlich viele, bei Gleichungen von der Form $ax + by = c$ nur wenige Werthe möglich seyen, und daß man bei letzteren den Bruch, worin die zweite Unbekannte vorkommt, so darzustellen suchen muß, daß die Unbekannte innerhalb der Klammern positiv erscheint.

## Aufgaben.

1. Es wurde eine Anzahl Gänse und Ferkel gekauft, eine Gans wurde um 17, ein Ferkel um 29 Groschen bezahlt. Es kosteten aber die Ferkel um 7 Groschen mehr, als die Gänse. Wie viel Stücke konnten es von jeder Gattung gewesen seyn?

Ansatz. Es waren x Gänse und y Ferkel; jene kosteten 17x, diese 29y Groschen. Mithin.

$$17x + 7 = 29y$$

Lösung. $$17x - 29y = -7$$

$$x = \frac{29y - 7}{17} = y + \frac{12y - 7}{17}$$

Soll x durch Ganze gegeben seyn, so muß auch $\frac{29y - 7}{17}$ oder der nach der Division sich ergebende Rest $\frac{12y - 7}{17}$ eine ganze Zahl seyn. Man setze daher diesen Bruch der unbestimmten Größe A gleich, und bestimme daraus y,

nämlich $\frac{12y - 7}{17} = A$

$$y = \frac{17A + 7}{12} = A + \frac{5A - 7}{12}.$$ Man setze ebenso

$\frac{5A + 7}{12} = B$ (einer zweiten unbest. Größe)

$$A = \frac{12B - 7}{5} = 2B - 1 + \frac{2B - 2}{5}$$

$$\frac{2B - 2}{5} = C; \quad B = \frac{5C + 2}{2} = 2C + 1 + \frac{C}{2}$$

$$\frac{C}{2} = D; \quad C = 2D.$$

Rückwärts substituirt:

$$B = \frac{5 \cdot 2D + 2}{2} = 5D + 1$$

$$A = \frac{12\,(5D + 1) - 7}{5} = 12D + 1$$

$$y = \frac{17\,(12D + 1) + 7}{12} = 17D + 2$$

$$x = \frac{29\,(17D + 2) - 7}{17} = 29D + 3$$

Für D = 0, 1, 2, 3 . . . . . .
ist y = 2, 19, 36, 53 . . . . um 17 zunehmend
und x = 3, 32, 61, 90 . . . . um 29 zunehmend.

2. Welche Zahlen sind durch 5 theilbar, geben aber durch 11 dividirt 1 zum Reste?

Ansatz. Eine solche Zahl sey x, so ist $\frac{x}{5}$ gleich einer unbestimmten ganzen Zahl, wofür A gesetzt werden kann, und wenn x um 1 vermindert wird, so gibt es auch durch 11 dividirt, eine ganze Zahl = B zum Quotienten. Also

$$\frac{x}{5} = A \text{ und } \frac{x - 1}{11} = B$$

Lösung. $x = 5A,\ x = 11B + 1$

$$5A = 11B + 1$$

$$A = \frac{11B + 1}{5} = 2B + \frac{B + 1}{5}$$

$$\frac{B + 1}{5} = C;\ B = 5C - 1$$

$$x = 11\,(5C - 1) + 1 = 55C - 10$$

Für C = 1, 2, 3 . . . . . . . . .
ist x = 45, 100, 155 . . . . . . . . um 55 zunehmend.

Zusatz. Kommt zu den beiden Bedingungen der vorigen Aufgabe noch eine ähnliche dritte, z. B. „daß die Zahlen durch 4 dividirt 3 zum Reste geben," so wird aus dieser neuen Bedingung gleichfalls ein Ausdruck für x gesucht und mit dem zuletzt gefundenen zusammengestellt ꝛc. Nämlich

$$\frac{x-3}{4} = D,\ x = 4D + 3$$

$$4D + 3 = 55C - 10$$

$$D = \frac{55C - 13}{4} = 13C - 3 + \frac{3C - 1}{4}$$

$$\frac{3C-1}{4} = E;\ C = \frac{4E+1}{3} = E + \frac{E+1}{3}$$

$$\frac{E+1}{3} = F;\qquad E = 3F - 1$$

$$C = \frac{4(3F-1)+1}{3} = 4F - 1$$

Für $F = 1, 2 \ldots x = 55(4F - 1) - 10 = 220F - 65.$

ist $x = 155,\ 375 \ldots$

Anmerkung. Aufgaben dieser Art werden gewöhnlich in der Form gegeben: „Ein Corps kann 5 Mann hoch aufgestellt werden, wird es aber 11 Mann hoch aufgestellt, so bleibt 1 Mann übrig ꝛc., wie viel Mann waren es?“ Oder: „Eine Bäuerin gab die Zahl der zu Markte gebrachten Aepfel in der Art an: gebe ich 5 um einen Kreuzer, so bleibt mir keiner übrig ꝛc.“

4. Es sollen 200 fl. in Bayerthalern und Karolinen bezahlt werden. Wie kann dieses geschehen?

Ansatz. Man brauche x Bayerthaler $= 2\frac{2}{5}x$ fl. $= \frac{12x}{5}$ fl. und y Karolin $= 11y$ fl., so ist

$$\frac{12x}{5} + 11y = 200$$

Lösung. $12x + 55y = 1000$

$$x = \frac{1000 - 55y}{12} = 83\tfrac{4}{12} - 4\tfrac{7}{12}y$$

$$= 83 - 4y + \tfrac{4}{12} - \frac{7y}{12}.$$

Um nun 7y (innerhalb Klammern) positiv zu erhalten, setze man die Brüche $\frac{4}{12} - \frac{7y}{12} = -\frac{7y}{12} + \frac{4}{12} = -\left(\frac{7y-4}{12}\right)$; also

$$x = 83 - 4y - \left(\frac{7y-4}{12}\right) \text{ und}$$

$$\frac{7y-4}{12} = A, \text{ woraus}$$

$$y = \frac{12A+4}{7} = A + \frac{5A+4}{7}$$

$$\frac{5A+4}{7} = B;\ A = \frac{7B-4}{5} = B + \frac{2B-4}{5}$$

$$\frac{2B-4}{5} = C;\ B = \frac{5C+4}{2} = 2C + 2 + \frac{C}{2}$$

$$\frac{C}{2} = D;\ C = 2D$$

$$B = \frac{5.2D+4}{2} = 5D + 2$$

$$A = \frac{7(5D+2)-4}{5} = 7D + 2$$

$$y = \frac{12(7D+2)+4}{7} = 12D + 4$$

$$x = \frac{1000-55(12D+4)}{12} = 65 - 55D.$$

Damit hier x positiv erscheine, so kann

D = 0, 1 gesetzt werden; dann ist
y = 4, 16 Karolin
x = 65, 10 Bayerthaler

## §. 52.

Aufgabe. Unbestimmte Aufgaben für zwei Gleichungen mit drei und mehreren unbekannten Größen zu lösen.

Auflösung. Man verwandle die beiden Gleichungen durch Comparation (nach §. 44.) in eine Gleichung mit zwei (oder auch mehreren) Unbekannten, und behandle diese nach §. 50.

### Aufgaben.

1. 30 Personen, Männer, Weiber und Kinder verzehrten zusammen 29 fl. Wenn nun von dieser Summe ein Mann 1 fl. 45 kr., ein Weib 1 fl. 10 kr. und ein Kind 30 kr. bezahlte; wie viel waren es Männer, Weiber und Kinder?

Ansatz. $x + y + z = 30$ | $1\frac{3}{4}x + 1\frac{1}{6}y + \frac{1}{2}z = 29$

$x = 30 - y - z$ | $x = \frac{348 - 14y - 6z}{21}$

$$30 - y - z = \frac{348 - 14y - 6z}{21}$$

$$y = \frac{282-15z}{7} = 40\frac{2}{7} - 2\frac{1}{7}z = 40 - 2z - \left(\frac{z-2}{7}\right)$$

$$\frac{z-2}{7} = A$$

$$z = 7A + 2$$

$$y = \frac{282 - 15(7A + 2)}{7} = 36 - 15A$$

$$x = 30 - (36 - 15A) - (7A + 2) = 8A - 8.$$

Hier kann, damit y und x positiv werden, und x nicht = 0 wird, A nur = 2 gesetzt werden. Dafür ergibt sich:

x = 8 Männer, y = 6 Weiber, z = 16 Kinder.

2. Eine Bäuerin hat Gänse, Enten, Hühner und Tauben, zusammen 46 Stück um 17 fl. verkauft, indem sie für eine Gans 1 fl. 15 kr., für eine Ente 40 kr., für ein Huhn 20 kr., für eine Taube 10 kr. erhielt. Wie viel Stücke waren es von jeder Gattung?

Ansatz. $v + x + y + z = 46$ | $1\frac{1}{4}v + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z = 17$

$z = 46 - v - x - y$ | $z = \frac{204 - 15v - 8x - 4y}{2}$

$$46 - v - x - y = \frac{204 - 15v - 8x - 4y}{2}$$

$$y = \frac{112 - 13v - 6x}{2} = 56 - 3x - \frac{13v}{2}$$

$$v = 2A$$

$$y = 56 - 3x - 13A$$

$$z = 46 - 2A - x - (56 - 3x - 13A) = 11A + 2x - 10$$

In den Ausdrücken für y und z kommen zwei unbestimmte Größen A und x vor.

| Setzt man A = | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| so kann seyn x = | 14, 13, ... 1 | 9, 8, .... 1 | 5, 4.... 1 | 1 |
| und es ist v = | 2, 2, ... 2 | 4, 4, .... 4 | 6, 6.... 6 | 8 |
| y = | 1, 4, ...40 | 3, 6, ....27 | 2, 5....14 | 1 |
| z = | 29, 27, ... 3 | 30, 28, ....14 | 33, 31....25 | 36. |

# Dritter Artikel.

## Quadratische Gleichungen.

§. 53.

Erklärung. Eine Gleichung heißt quadratisch, wenn darin die unbekannte Größe im Quadrate und in keiner höhern Würde vorkommt. Sie heißt rein, wenn die unbekannte Größe nur im Quadrate, unrein oder gemischt, wenn diese auch in der ersten Würde vorkommt.

Anmerkung. Eine Gleichung wird manchmal erst durch Reduction in Form einer quadratischen, so wie eine mit $x^2$ gegebene Gleichung in Form einer einfachen dargestellt. Z. B. $\frac{bx - c}{x - a} = cx$ wird durch Hinwegschaffung des Nenners in die quadratische Gleichung: $bx - c = cx^2 - acx$, und $ax^3 + bx^2 = cx$ durch Division mit x in die quadratische Gleichung $ax^2 + bx = c$; dagegen $ax^2 + bx = cx$ durch Division in die einfache Gleichung: $ax + b = c$ verwandelt.

§. 54.

Aufgabe. Eine reine quadratische Gleichung zu lösen.

Auflösung. Man reducire sie so, daß auf der einen Seite das Quadrat der unbekannten Größe positiv und mit dem Coefficienten 1, auf der andern Seite die Summe der bekannten Größen steht; dann ziehe man aus beiden Seiten der Gleichung die Quadratwurzel aus.

Z. B.

$$3(x^2 - 40) = 2x^2 + 24$$
$$3x^2 - 120 = 2x^2 + 24$$
$$x^2 = 144$$
$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{144} \quad (\text{§. 24. II. 1})$$
$$x = \pm 12$$

§. 55.

**Aufgabe.** Eine unreine quadratische Gleichung zu lösen.

**Auflösung.** 1) Man reducire sie in der Art, daß an der ersten Stelle das Quadrat der Unbekannten positiv, und mit dem Coefficienten 1, an der zweiten Stelle die Summe der ersten Würden der Unbekannten, auf der andern Seite die Summe der bekannten Größen stehe.

2) Man ergänze die erste Seite zu einem vollständigen Quadrate, indem man den halben Coefficienten des zweiten Gliedes zum Quadrate erhebt, und dieses Quadrat zu den beiden Seiten der Gleichung addirt; und ziehe dann aus beiden Seiten die Quadratwurzel.

**Beispiele.**

I. $$6 + \frac{x^2}{2} - 6x = \tfrac{3}{2}x - 19$$

**Reduction.**
$$\frac{x^2}{2} - 6x - \tfrac{3}{2}x = -25$$
$$x^2 - 12x - 3x = -50$$
$$x^2 - 15x = -50$$

**Lösung und Beweis.** Aus $x^2 - 15x$ kann die Quadratwurzel nicht gezogen werden, weil auch dann, wenn man $x^2 - 15x = a^2 + 2ab$ der Quadrirungsformel (§. 28.) setzt, noch ein dem $b^2$ entsprechendes Glied fehlt. Dieß kann aber aus $-15x = 2ab$ oder, da $x = a$, aus $-15 = 2b$, also $b = -\frac{15}{2}$ ergänzt werden, indem man $b^2 = \left(-\frac{15}{2}\right)^2 = \frac{225}{4}$ auf beiden Seiten addirt. Also

$$x^2 - 15x + \frac{225}{4} = -50 + \frac{225}{4}$$
$$\sqrt{x^2 - 15x + \frac{225}{4}} = \pm\sqrt{-50 + \frac{225}{4}} = \pm\sqrt{\frac{25}{4}}$$

Die Wurzel der ersten Seite ist bei solchen Gleichungen immer schon bekannt, indem $a = x$, $b =$ dem halben Coefficienten vom zweiten Gliede ist. Also

$$x - \frac{15}{2} = \pm\frac{5}{2}$$
$$x = \frac{15}{2} \pm \frac{5}{2} = 10 \text{ oder } 5.$$

II. $$\frac{a - x}{b + x} = \frac{a - bx}{a}$$

Reduction. $$a^2 - ax = ab - b^2x + ax - bx^2$$

$$bx^2 + b^2x - 2ax = ab - a^2$$

$$x^2 + \frac{x(b^2 - 2a)}{b} = \frac{ab - a^2}{b}$$

Lösung.

$$x^2 + \frac{x(b^2 - 2a)}{b} + \left(\frac{b^2 - 2a}{2b}\right)^2 = \frac{ab - a^2}{b} + \left(\frac{b^2 - 2a}{2b}\right)^2$$

$$x + \frac{b^2 - 2a}{2b} = \pm\sqrt{\frac{ab - a^2}{b} + \left(\frac{b^2 - 2a}{2b}\right)^2}$$

$$x = -\frac{b^2 - 2a}{2b} \pm \sqrt{\frac{ab - a^2}{b} + \frac{b^4 - 4ab^2 + 4a^2}{4b^2}}$$

$$x = \frac{-(b^2 - 2a) \pm \sqrt{(b^4 - 4a^2b + 4a^2)}}{2b}$$

## §. 56.

### Aufgaben für quadratische Gleichungen.

1. Wie groß muß der Durchmesser des Kolbens einer Saugpumpe seyn, welche in einer Minute bei einer Hubhöhe von 12 Zoll bei 30 Kolbenspielen 136 Maß Wasser geben soll?

Ansatz. Bezeichnet W die Wassermasse in Duodecimal-Kubikzollen, welche ein Zylinder z von der Hubhöhe h und der Grundfläche des Kolbens $= \frac{d^2\pi}{4}$ hält, n die Anzahl der Kolbenspiele in einer Minute, und 74,3 die Duodecimal-Kubikzoll, welche 1 bayer. Maß hat, so ist

$$W = \frac{z \cdot n}{74{,}3} = \frac{d^2\pi \cdot h \cdot n}{4 \cdot 74{,}3}, \text{ also}$$

$$136 = \frac{d^2 \cdot 3{,}14 \cdot 12 \cdot 30}{4 \cdot 74{,}3} = \frac{d^2 \cdot 282{,}6}{74{,}3}$$

Lösung. $$d^2 = \frac{136 \cdot 74{,}3}{282{,}6} = 35{,}7$$

$$d = \sqrt{35{,}7}, \text{ nahezu } = 6''.$$

2. Ein in Form eines Rechtecks angelegter Garten hat 6600 □ Fuß Inhalt, indem seine Länge noch so groß ist, als seine Breite, weniger 10 Fuß. Wie breit und wie lang ist er?

Ansatz. Der Garten war x Fuß breit und 2x — 10 Fuß lang; also

$$x(2x - 10) = 6600$$

Lösung.

$$2x^2 - 10x = 6600$$

$$x^2 - 5x = 3300$$

$$x^2 - 5x + (\tfrac{5}{2})^2 = 3300 + (\tfrac{5}{2})^2$$

$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{3300 + \frac{25}{4}}$$

$$x = \frac{5}{2} + \frac{115}{2} = 60$$

die Breite beträgt 60′, die Länge 110′.

3. Ein Mensch soll längere Zeit eine Kurbel mit einer Geschwindigkeit umdrehen, welche auf eine Minute noch so viel weniger $17\frac{1}{2}$ Fuß beträgt, als die Anzahl der Pfunde, durch welche seine Kraftanstrengung ausgedrückt wird. Wie groß ist die Kraftanstrengung, wie groß die Geschwindigkeit?

Ansatz. Drückt man erstere durch x aus, so ist letztere $= 2x - 17\frac{1}{2}$. Es ist aber der Moment der menschlichen Kraft $= 2500$; daher

$$x(2x - 17\tfrac{1}{2}) = 2500$$

Lösung.

$$2x^2 - \frac{35}{2}x = 2500$$

$$x^2 - \frac{35x}{4} = 1250$$

$$x = \frac{35}{8} \pm \sqrt{1250 + \frac{1225}{64}}$$

$$x = \frac{35}{8} \pm \frac{285}{8} = 40$$

die Kraft beträgt 40 Pfund, die Geschwindigkeit $2.40 - 17\frac{1}{2} = 62\frac{1}{2}$ Fuß.

4. Mehrere Arbeiter heben an einer Handzugramme einen 360 Pfund schweren Rammbär; nach einiger Zeit wird die Zahl der Arbeiter um 2 vermehrt, und dadurch die auf jeden im Durchschnitte treffende Last um $6\frac{1}{4}$ Pfund vermindert. Wie viel waren es ursprünglich Arbeiter?

Ansatz. Anfangs waren es x, später $x + 2$ Arbeiter, von jenen hatte jeder $\frac{360}{x}$, von diesen jeder $\frac{360}{x+2}$ Pfund zu heben, und da letzterer Ausdruck um 6 Pfund kleiner ist, als ersterer, so ist

$$\frac{360}{x} = \frac{360}{x+2} + 6$$

Lösung. $360x + 720 = 360x + 6x^2 + 12x$

$$6x^2 + 12x = 720$$

$$x^2 + 2x = 120$$

$$x = -1 + \sqrt{121} = 10 \text{ Arbeiter.}$$

5. Von zwei Personen hatte jede ein Capital ausgeliehen; A nahm von seinem Capitale jährlich 240 fl. Zinsen ein, während B. 250 fl. erhielt, indem dieser zwar 1000 fl. weniger, aber um 1 Procent höher ausgeliehen hatte. Wie heißen die Capitale und ihre Procente?

Ansatz. A hatte x fl. zu y Procent, B $x - 1000$ fl. zu $y + 1$ Procent ausgeliehen; Zinsen des A $= \frac{xy}{100}$, des B $= \frac{(x-1000)(y+1)}{100}$. Daher

$$\frac{xy}{100} = 240 \qquad \Bigg| \qquad \frac{(x-1000)(y+1)}{100} = 250$$

Lösung. $x = \frac{24000}{y}$

$$xy - 1000y + x - 1000 = 25000$$

$$x(y+1) = 26000 + 1000y$$

$$x = \frac{26000 + 1000y}{y+1}$$

$$\frac{24000}{y} = \frac{26000 + 1000y}{y+1}$$

$$24y + 24 = 26y + y^2$$

$$y^2 + 2y + 1 = 25$$

$$y = \pm 5 - 1 = 4 \text{ oder } = -6$$

$$x = \frac{24000}{4} = 6000$$

A hatte 6000 fl. zu 4 %, B 5000 fl. zu 5 % ausgeliehen.

# Dritte Abtheilung.

## Verhältnißlehre.

### §. 57.

Vorerinnerungen.

1. Die Verhältnißlehre umfaßt die Verhältnisse, die damit zusammenhängenden Proportionen und Progressionen, und die aus letzteren abgeleiteten Logarithmen.

2. Die Kenntnisse der Verhältnisse und Proportionen wird, als bereits aus Lehrbüchern der Rechenkunst erworben, vorausgesetzt. (Weigls von mir umgearbeitete Rechenkunst. IV. Aufl. §. 83 — 128). Im Nachfolgenden sind die wichtigsten Sätze derselben um des Zusammenhanges willen angeführt, und zwar einige ergänzend, die meisten nur zur Wiederholung und zur Gewinnung einer allgemeinen Uebersicht.

## Erster Artikel.

### Von den Verhältnissen.

### §. 58.

Erklärung. Verhältniß ist die Vergleichung zweier gleichartigen Größen, in so ferne dadurch entweder bestimmt wird, um wie viele Einheiten oder um wie vielmal die eine größer oder kleiner ist, als die andere. Die erste Vergleichungsart heißt man ein arithmetisches, die zweite ein geometrisches Verhältniß, die verglichenen Größen Glieder, und zwar die zuerst gesetzte Vorder-, die zuletzt gesetzte Hinterglied.

## §. 59.

### Erklärungen.

1. Durch das arithmetische Verhältniß wird die Differenz zwischen dem Hinter- und Vordergliede bestimmt. Daher ist das Hinterglied gleich der Summe des Vordergliedes und der Differenz; für die Differenz d und das Vorderglied a oder b sind allgemeine Formeln des arithmetischen Verhältnisses: $a - (a + d)$ und $b - (b + d)$.

2. Zwei arithmetische Verhältnisse sind gleich, wenn ihre Differenzen gleich sind; daher ist $a - (a + d) = b - (b + d)$.

## §. 60.

### Erklärungen.

1. Durch das geometrische Verhältniß wird der Exponent, d. i. die Zahl bestimmt, welche angibt, um wie vielmal das Hinterglied größer oder kleiner ist, als das Vorderglied. Daher ist das Hinterglied gleich dem Producte aus dem Vordergliede in den Exponenten; für den Exponenten q und das Vorderglied a oder b sind allgemeine Formeln des geometrischen Verhältnisses: $a : aq$ oder $b : bq$.

2. Zwei geometrische Verhältnisse sind gleich, wenn sie gleiche Exponenten haben; daher ist $a : aq = b : bq$.

---

# Zweiter Artikel.

## Von den Proportionen.

---

## §. 61.

### Erklärungen.

1. Zwei gleiche Verhältnisse mittelst des Gleichheitszeichen verbunden, geben eine Proportion, und zwar eine arithmetische oder geometrische, je nachdem es die Verhältnisse sind.

2. Die Proportionen heißen discret oder stätig, je nachdem die mittleren Glieder ungleich oder gleich sind.

3. Mehrere gleiche Verhältnisse, von welchen je zwei zunächst folgende eine stätige Proportion bilden, geben eine Progression, und zwar, nach der Beschaffenheit der Verhältnisse, eine arithmetische oder geometrische.

## A. Arithmetische Proportionen.

### §. 62.

#### Lehrsätze.

Für eine discrete Proportion ist

1) die allgemeine Formel:

$$a - (a + d) = b - (b + d).$$

Der Beweis ergibt sich aus §. 61. 1°. und §. 59. 2°.

2) das Grundgesetz: die Summe der äußeren Glieder ist gleich der Summe der mittleren.

Beweis $a + (b + d) = (a + d) + b = a + b + d.$

### §. 63.

#### Lehrsätze.

Für eine stätige Proportion ist

1) die allgemeine Formel:

$$a - (a + d) = (a + d) - (a + d + d) \text{ oder } a - (a + d) - (a + 2d).$$

Der Beweis ergibt sich aus §. 61 2°.

2) das Grundgesetz: die Summe der äußeren Glieder ist gleich dem doppelten mittleren Gliede.

Beweis $a + (a + 2d) = 2(a + d) = 2a + 2d.$

## B. Geometrische Proportionen.

### §. 64.

#### Lehrsätze.

Für eine discrete Proportion ist

1) die allgemeine Formel:

$$a : aq = b : bq.$$

Der Beweis ergibt sich aus §. 61. 1° und §. 60. 2°.

2) das Grundgesetz: das Product der äußeren Glieder ist gleich dem Producte der mittleren.

Beweis $a \times bq = aq \times b = abq.$

## §. 65.

### Lehrsätze.

Für eine stätige Proportion ist

1) die allgemeine Formel:

$$a : aq = aq : aq \,.\, q \text{ oder } a : aq : aq^2.$$

Der Beweis ergibt sich aus §. 61. 2°.

2) das Grundgesetz: das Product der äußeren Glieder ist gleich dem Quadrate des mittleren Gliedes.

Beweis. $a \times aq^2 = (aq)^2 = a^2 q^2$.

Zusatz. Nach dem letzten Gesetze kann jede stätige Proportion in eine Gleichung verwandelt, und darnach zwischen zwei gegebenen Gliedern die mittlere geometrische Proportional-Zahl gefunden werden.

Beispiel. Es soll ein Rechteck, dessen Länge $= 9'$ und dessen Höhe $= 4'$ ist, in ein gleich großes Quadrat verwandelt werden; wie groß muß eine Seite davon genommen werden?

Lösung. Die Seite eines Quadrates ist die mittlere geometrische Proportional-Linie zwischen der Länge und Höhe eines gleich großen Rechtecks; daher

$$9 : x : 4$$
$$x^2 = 9 \times 4 = 36$$
$$x = \sqrt{36} = 6'.$$

## §. 66.

### Lehrsätze.

Die Glieder einer Proportion können

1) acht verschiedenerlei Stellungen erhalten, indem

a) entweder die beiden äußeren oder mittleren oder alle verwechselt, oder

b) die Verhältnisse umgestürzt werden;

2) in verschiedener Art verändert werten, und zwar

a) durch Multiplication oder Division, indem man ein äußeres und mittleres Glied oder alle Glieder mit der nämlichen Zahl multiplicirt oder dividirt;

b) durch Potenzirung oder Wurzelausziehen, indem man alle Glieder zur nämlichen Würde erhebt, oder aus allen die nämliche Wurzel zieht;

c) durch Addition oder Subtraction, indem man entweder setzt:

α) Es verhält sich die Summe oder Differenz der beiden ersten Glieder zu der der beiden letzten, wie die Vorderglieder oder Hinterglieder zu einander; oder

β) Es verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zu der der Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Zusatz. Auch bei mehreren gleichen Verhältnissen verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede.

## §. 67.

### Lehrsätze.

Zwei Proportionen können mit einander vereinigt werden:

1) zu einer Proportion, in welcher beide Verhältnisse zusammengesetzt (alle Glieder Producte oder Quotienten) sind, wenn die unter sich ungleichen Glieder mit einander multiplicirt oder dividirt werden;

2) zu einer Proportion, in welcher die beiden Verhältnisse einfach sind, wenn die gegebenen Proportionen zwei Glieder gemein haben, welche in beiden a) Glieder eines Verhältnisses, oder b) homologe, oder c) äußere oder mittlere Glieder sind. Z. B.

$$\frac{\begin{array}{c} a : b = c : d \\ a : b = e : f \end{array}}{c : d = e : f} \qquad \frac{\begin{array}{c} a : b = c : d \\ a : e = c : f \end{array}}{b : e = d : f} \qquad \frac{\begin{array}{c} a : b = c : d \\ a : e = f : d \end{array}}{b : e = f : c.}$$

3) zu einer Proportion, von der ein Verhältniß einfach, das andere zusammengesetzt ist, wenn die gegebenen Proportionen ein Glied in der Art gemein haben, daß dieses in einem Verhältnisse der einen Proportion Vorderglied, in einem Verhältnisse der andern Proportion Hinterglied ist;

$$\frac{\begin{array}{c} a : b = c : d \\ e : a = f : g \end{array}}{e : b = cf : dg}$$

4) zu einer Proportion, von welcher ein Verhältniß einfach, das andere vervielfältigt oder duplicirt ist (die beiden Glieder des zweiten Verhältnisses Quadrate sind), wenn die gegebenen Proportionen drei Glieder in der Art gemein haben, daß

zwei in einem Verhältnisse beisammenstehen, das dritte in einem Verhältnisse der einen Proportion Vorderglied, in der andern Hinterglied ist.

$$\begin{array}{l} a : b = c : d \\ b : e = c : d \\ \hline a : e = c^2 : d^2. \end{array}$$

Anmerkung 1. Die Sätze 1°, 2°, 3°, 4° lassen sich auch auf die Verbindung mehrerer Proportionen ausdehnen.

Anmerkung 2. Beispiele über die Proportionslehre sind in der Rechenkunst, mehrere auch in der Algebra gegeben. Beispiele über vervielfältigte Verhältnisse finden sich in dem von mir umgearbeiteten Weiglschen Lehrbuche der allgemeinen Größenlehre und Algebra III. Aufl. §. 236. und 237.

---

# Dritter Artikel.

## Von den Progressionen.

### §. 68.

#### Erklärungen.

1. Progression ist eine Folge von Zahlen, von welchen je drei auf einander folgende eine stätige Proportion bilden; sie heißt, nach der Beschaffenheit der einzelnen Proportionen arithmetisch oder geometrisch. Die einzelnen Zahlen nennt man Glieder; dasjenige Glied, deren Formel das allgemeine Bildungsgesetz enthält, das allgemeine Glied.

1. Sind die folgenden Glieder größer, als die vorhergehenden, so ist die Progression steigend; sind die folgenden kleiner, als die vorhergehenden, so ist die Progression fallend. Z. B.

| | | |
|---|---|---|
| 3, 5, 7, 9, 11, 13 | steigende | arithmetische Progression |
| 13, 11, 9, 7, 5, 3 | fallende | |
| 3, 6, 12, 24, 48, 96 | steigende | geometrische Progression. |
| 96, 48, 24, 12, 6, 3 | fallende | |

Zusatz 1. Bei der arithmetischen Progression nehmen die einzelnen Glieder um eine gleiche Differenz, bei der geometrischen um ein gleiches Vielfache, Exponent genannt, zu oder ab.

Zusatz 2. Bei der fallenden arithmetischen Progression ist die Differenz negativ, bei der fallenden geometrischen ist der Exponent ein echter Bruch.

Zusatz 3. Jede fallende Progression wird durch Umkehrung in eine steigende verwandelt.

## A. Arithmetische Progressionen.

### §. 69.

Lehrsatz. Wird das erste Glied mit a, die Differenz ohne Rücksicht auf das Vorzeichen mit d, die Gliederzahl mit n bezeichnet, so ist die allgemeine Formel einer arithmetischen Progression:

$$a,\ a + d,\ a + 2d,\ a + 3d, \ldots\ldots a + d(n - 1).$$

Beweis 1. Das zweite Glied entsteht, wenn zum ersten $= a$ die Differenz $= d$ hinzukommt, ist also $= a + d$; das dritte entsteht, wenn zum zweiten wieder d addirt wird, ist also $= a + 2d$ u. s. w. (§. 68. Zus. 1.)

2. Jedes Glied besteht aus a und dem so vielfachen d, als Glieder vorhergehen; dem letzten oder allgemeinen Gliede $= z$ gehen aber, wenn dessen Stellenzahl mit n bezeichnet wird, $n - 1$ Glieder vorher; daher ist

$$z = a + d(n - 1)$$

Zusatz. Wie die Glieder, vorwärts schreitend, immer um d zu nehmen, so nehmen sie, rückwärts schreitend, um d ab; also vorletztes $= z - d$, zweitvorletztes $= z - 2d$ u. s. w.

### §. 70.

Lehrsatz. Die Summe von n Gliedern ist ausgedrückt durch

$$S = (a + z)\frac{n}{2}$$

Beweis. Die Summe erhält man offenbar, wenn man alle Glieder, vorwärts oder rückwärts angefangen, addirt; also

$$S = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots\ldots (z-2d) + (z-d) + z$$
und $$S = z + (z-d) + (z-2d) + \ldots\ldots (a+2d) + (a+d) + a$$

$$2S = (a+z) + (a+z) + (a+z) + \ldots\ldots (a+z) + (a+z) + (a+z)$$
$$2S = (a+z)n,$$

indem die Partialsumme $a + z$ so oft als Summand steht, als die Gliederzahl $n$ beträgt, und eine Größe $n$mal als Summand setzen, sie mit $n$ multipliciren heißt. Folglich

$$S = (a + z)\frac{n}{2}.$$

Anmerkung. Von den in den zwei Grundgleichungen $z = a + d(n-1)$ und $S = (a+z)\frac{n}{2}$ vorkommenden 5 Größen können je 2 unbekannt seyn, und aus den übrigen bekannten Größen nach §. 42. 44. und 56. in besonderen Formeln gefunden werden. Bestimmte Aufgaben können entweder durch Substitution in vorher zu findende Formeln oder durch Substitution in die beiden Grundgleichungen und darauf folgende weitere Entwickelung gelöst werden.

## §. 71.

### Aufgaben für arithmetische Progressionen.

1. Wie hoch ist ein Thurm, wenn ein von dessen Spitze frei herabfallender Stein 4 Secunden braucht, bis er den Boden erreicht?

Lösung. Im freien Falle legt ein Körper in der ersten Secunde 15, in der zweiten 45, in der dritten 75 Fuß u. s. w. zurück; daher ist $a = 15$, $d = 30$, $n = 4$. Unbekannt sind: $z =$ der Anzahl der in der letzten Secunde, und $S =$ der Anzahl der im Ganzen zurückgelegten Fuße; mithin

$$z = 15 + 30(4-1) = 105'$$
$$S = (15 + 105)\tfrac{4}{2} = 240'$$

2. Unter einige Soldaten, welche zuerst den Wall einer bestürmten Festung erstiegen hatten, wurden 1455 fl. so vertheilt, daß der Erste 92 fl., jeder Folgende um 3 fl. weniger erhielt. Wie viel Soldaten erhielten eine Belohnung, wie viel erhielt der Letzte?

Lösung. Setzt man, um die Reihe in eine steigende zu verwandeln, $z = 92$, $d = 3$ und $S = 1455$, so sind $n$ und $a$ unbekannt. Daher die Gleichungen:

| | |
|---|---|
| $92 = a + 3(n-1)$ | $1455 = (a + 92)\frac{n}{2}$ |
| $92 = a + 3n - 3$ | $2910 = an + 92n$ |
| $a = 95 - 3n$ | $a = \frac{2910 - 92n}{n}$ |

$$95 - 3n = \frac{2910 - 92n}{n}$$

$$95n - 3n^2 = 2910 - 92n$$

$$n^2 - \frac{187n}{3} = -970$$

$$n = \frac{187}{6} \pm \sqrt{-970 + \left(\frac{187}{6}\right)^2}$$

$$n = \frac{187}{6} \pm \sqrt{\frac{-34920 + 34969}{36}}$$

$$n = \frac{187}{6} \pm \frac{7}{6}$$

$$n = \frac{194}{6} \text{ oder} = \frac{180}{6} = 30 \text{ (hier allein möglich)}$$

$$a = 95 - 3.30 = 5.$$

Es waren also 30 Soldaten, von welchen der Letzte 5 fl. erhielt.

3. Einmal stieg vom 1 — 12. Juli das Thermometer regelmäßig so, daß an jedem folgenden Tage der höchste Stand um gleichviel größer war. Und so kam es, daß es am 5. Juli auf 18° stand, und daß das Mittel zwischen dem höchsten Stande des 10. und 11. $20\frac{3}{4}°$ war. Wie hoch stand es am 1., um wie viel stieg es jeden Tag, wie hoch stand es am 12.?

| | |
|---|---|
| Lösung. $a + 4d = 18°$ | $\frac{(a + 9d) + (a + 10d)}{2} = 20\frac{3}{4}$ |
| $a = 18 - 4d$ | $2a + 19d = \frac{83}{2}$ |
| | $a = \frac{83 - 38d}{4}$ |

$$18 - 4d = \frac{83 - 38d}{4}$$

$$72 - 16d = 83 - 38d$$

$$d = \tfrac{1}{2}$$

$$a = 18 - 4.\tfrac{1}{2} = 16$$

$$z = 16 + \tfrac{1}{2}(12 - 1) = 21\tfrac{1}{2}°.$$

4. Ein haubarer Waldbestand von M Kubikfuß Masse und von p Procent jährlichen Zuwachs soll in n Jahren so abgetrieben werden, daß am Ende eines jeden Jahres gleichviel geschlagen wird. Wie viel kann jährlich geschlagen werden?

Lösung. Während der n Jahre ist nicht nur M abzuschlagen, sondern auch der jährliche Zuwachs der jedesmal noch stehen gebliebenen Waldung. Am Ende eines jeden Jahres werden x Kubikfuß geschlagen. Für das erste Jahr kommt noch der Zuwachs von M, nämlich $\frac{Mp}{100}$, für das zweite Jahr der Zuwachs von M — x, nämlich $\frac{(M-x)p}{100}$, rc. in Berechnung. Daher

$$nx = M + \frac{Mp}{100} + (M-x)\frac{p}{100} + (M-2x)\frac{p}{100} + (M-3x)\frac{p}{100} + \ldots (M - [n-1]x)\frac{p}{100}$$

$$nx = M + \frac{p}{100}(M + (M-x) + (M-2x) + (M-3x) + \ldots (M - [n-1]x))$$

Nun ist $M + (M - x) + \ldots$ eine arithmetische Progression, wovon $a = M$, $z = M - (n-1)x$, $n = n$, also

$$S = (M + M - [n-1]x)\frac{n}{2} = (2M - [n-1]x)\frac{n}{2}$$

und $nx = M + \frac{p}{100}(2M - [n-1]x)\frac{n}{2}$

$$200nx = 200M + 2Mnp - n^2px + npx$$
$$200nx + n^2px - npx = 200M + 2Mnp$$
$$x(200n + n^2p - np) = 2M(np + 100)$$
$$x = \frac{2M(np + 100)}{n(n-1)p + 200n}$$

Für $M = 63000^{c'}$, $n = 6$, $p = 2$ ist

$$x = \frac{2.63000(6.2 + 100)}{6.5.2 + 200\,6} = 11200^{c'}.$$

## B. Geometrische Progressionen.

§. 72.

Lehrsatz. Wird das erste Glied mit a, der Exponent mit q, die Gliederzahl mit n bezeichnet, so ist die allgemeine Formel:

$$a, \; aq, \; aq^2, \; aq^3, \ldots\ldots aq^{n-1}.$$

Beweis. 1. Das zweite Glied entsteht, wenn das erste mit q multiplicirt wird, ist also $= aq$; eben so ist das dritte das q fache des zweiten, also $= aq^2$ u. s. w. (§. 68. Zus. 1.)

2. Jedes Glied ist ein Product aus dem ersten Gliede in eine Würde von q, deren Exponent der Anzahl der vorausgehenden Glieder gleich ist; daher ist das allgemeine oder letzte (nte) Glied, welchem $n - 1$ Glieder vorhergehen:

$$z = aq^{n-1}.$$

§. 73.

Lehrsatz. Die Summe von n Gliedern ist ausgedrückt durch

$$S = \frac{aq^n - a}{q - 1} = \frac{qz - a}{q - 1}$$

Beweis. Setzt man S der Summe der einzelnen Glieder gleich, multiplicirt diese Gleichung mit q, und zieht von der so erhaltenen Gleichung die erstere ab, nämlich:

$$\begin{array}{l} -S = a \pm aq \pm aq^2 \pm aq^3 \pm \ldots\ldots \pm aq^{n-3} \pm aq^{n-2} \pm aq^{n-1} \\ qS = \quad aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 \ldots \qquad + aq^{n-2} + aq^{n-1} + aq^n \\ \hline \end{array}$$

so ist $qS - S = -a + aq^n$

$$S(q-1) = aq^n - a$$

$$S = \frac{aq^n - a}{q - 1}$$

Es ist aber $q \,.\, z = q \,.\, aq^{n-1} = aq^n$, daher auch

$$S = \frac{qz - a}{q - 1}$$

Zusatz. Multiplicirt man Zähler und Nenner dieses Bruches mit $-1$, so erhält man die für die fallende Progression geltende Formel:

$$S = \frac{a - qz}{1 - q}.$$

Anmerkung. Die dem §. 70. beigefügte Anmerkung findet auch hier analoge Anwendung; nur ist noch beizufügen:

1) n

1) n kann nur durch Logarithmen,

2) a kann aus z, n, S; z aus a, n, S und q aus n, S und a oder z nur durch höhere Gleichungen gefunden werden.

Uebrigens finden die geometrischen Progressionen keine häufige Anwendung im bürgerlichen Leben.

## §. 73.

### Aufgaben für geometrische Progressionen.

1. Jemand säete einen Metzen Weizen aus, und benützte die ganze Ernte zur Aussaat für das folgende Jahr, die Ernte dieses Jahres zur Aussaat für das dritte u. s. w. Wenn sich nun das Saatkorn jährlich um das Fünffache vermehrte; wieviel wurde im siebenten Jahre, wieviel in allen 7 Jahren geerntet?

**Lösung.** $a = 1$, $q = 5$, $n = 7$; z und S unbekannt.

$$z = 1 \,.\, 5^6 = 15625$$

$$S = \frac{5 \cdot 15625 - 1}{5 - 1} = 19531 \text{ Metzen.}$$

2. Jemand ist einem Andern 6560 fl. schuldig, welche er in 8 Jahren so abtragen will, daß er in jedem folgenden Jahre dreimal soviel, als im vorhergehenden bezahle. Wieviel ist im ersten, wieviel im letzten Jahre abzutragen?

**Lösung.** $S = 6560$, $n = 8$, $q = 3$; a und z unbekannt.

$$z = a \,.\, 3^7 \qquad\qquad 6560 = \frac{3z - a}{3 - 1}$$

$$z = 2187a \qquad\qquad z = \frac{13120 + a}{3}$$

$$2187a = \frac{13120 + a}{3}$$

$$a = 2$$

$$z = 2187 \,.\, 2 = 4374.$$

# Vierter Artikel.

## Von den Logarithmen.

---

### §. 74.

#### Erklärungen.

1. Logarithmen sind Exponenten von Potenzen in Beziehung auf eine bestimmte Grundzahl.

2. Verbindet man nämlich mit der arithmetischen Progression 0, 1, 2 . . . eine geometrische, in der das erste Glied 1 und das zweite eine beliebige Zahl, z. B. 10 ist, also

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0, | 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | . . . . |
| mit | 1, | 10, | 100, | 1000, | 10000, | 100000, | 1000000, | . . . . |
| oder | 1, | 10, | $10^2$, | $10^3$, | $10^4$, | $10^5$, | $10^6$, | . . . . |

so zeigen die Glieder der arithmetischen Progression an, zu den wievielten Würden das zweite Glied der geometrischen erhoben werden muß, um den entsprechenden Gliedern der geometrischen Progression gleich zu werden, und heißen in dieser Beziehung die Logarithmen der letzteren.

3. Aber nicht bloß die Glieder der obigen geometrischen Progression, sondern auch alle andern Zahlen können als Potenzen von 10 gedacht werden, wenn 10 zu verschiedenen Würden mit ganzen und gebrochenen, positiven und negativen Exponenten erhoben angenommen wird; dann sind diese Exponenten die Logarithmen jener Zahlen in Beziehung auf die Grundzahl 10. Ist z. B. $10^x = y$, so ist x der Logarithmus von y, und man bezeichnet dieß: $x = \log. y$.

### §. 75.

#### Lehrsätze.

Die Logarithmenrechnung gründet sich auf die Potenzenrechnung. §. 74. 1°. Es verwandelt sich durch dieselbe

1) die Multiplication in eine Addition der Logarithmen der Factoren, weil bei der Multiplication der Potenzen von einerlei Wurzeln die Exponenten addirt werden (§. 14. 3°); eben so verwandelt sich

2) die Division in eine Subtraction des Logarithmus des Divisors vom Logarithmus des Dividends (§. 17. 6°);

3) das Erheben einer Zahl zu einer Würde in eine Multiplication des Exponenten in den Logarithmus der Zahl (§. 22. II. 3°);

4) das Ausziehen der Wurzel aus einer Zahl in eine Division des Logarithmus der Zahl durch den Wurzelexponenten (§. 24. 3°).

Zusatz. Daraus erklären sich folgende Veränderungen:

1) $\log.\ (ab) = \log.\ a + \log.\ b$

2) $\log.\ \left(\frac{a}{b}\right) = \log.\ a - \log.\ b$

3) $\log.\ (a^n) = n \log.\ a$

4) $\log.\ \sqrt[n]{a} = \frac{\log.\ a}{n}$

5) $\log.\ \left(\frac{a^2b^3}{cd^2}\right) = 2\log.\ a + 3\log.\ b - (\log.\ c + 2\log.\ d)$

6) $\log.\ \sqrt[3]{a^2(b-c)} = \frac{2\ \log.\ a + \log.\ (b - c)}{3}$.

## §. 76.

### Erklärungen.

1. Der Inbegriff der Logarithmen von den einzelnen Zahlen für eine bestimmte Grundzahl heißt Logarithmensystem.

2. Da jede positive Zahl, welche größer als 1 ist, als Grundzahl angenommen werden könnte; so wären auch unendlich viele Logarithmensysteme möglich. Wirklich berechnet sind aber nur zwei Systeme, nämlich für die Grundzahl 2,7182818 und für 10. Ersteres heißt das System der natürlichen Logarithmen, letzteres nach ihrem Berechner Henry Briggs das System der briggischen, oder wegen ihrer gewöhnlichen Anwendung im Leben das System der gemeinen Logarithmen.

## §. 77.

### Erklärungen.

Setzt man die Reihen des §. 74. auch unter die ersten Glieder fort:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| — 4, | — 3, | — 2, | — 1, | 0, | 1, | 2, | 3, | 4, | 5, |
| 0,0001, | 0,001, | 0,01, | 0,1, | 1, | 10, | 100, | 1000, | 10000, | 100000 |

und betrachtet sie näher, so ergeben sich nachstehende Sätze:

1) der Logarithmus von 1 ist = 0 (§. 17. Zus. 1.);

2) die Logarithmen derjenigen Zahlen, welche größer als 1, sind positiv, der echten Brüche aber negativ (§. 17. Zus. 2);

3) nur die Glieder der geometrischen Progression haben eine ganze Zahl, alle übrigen Zahlen Brüche zum Logarithmus, und zwar

4) die Zahlen von 1 bis 10 echte, die von 10 aufwärts unechte Brüche, Ganze mit einem angehängten Decimalbruche;

5) diese ganze Zahl ist für die zwischen 10 und 100 fallenden, also zweizifferigen Zahlen = 1, für die zwischen 100 und 1000 fallenden, also dreizifferigen Zahlen = 2, für die vierzifferigen = 3, und so allgemein für die n zifferigen Zahlen = n — 1. In dieser Art kann immer aus dem Localwerthe der höchsten Ziffer auf die ganze Zahl des Logarithmus und umgekehrt geschlossen werden; deßhalb nennt man die ganze Zahl eines Logarithmus Charakteristik. Der beigefügte Decimalbruch heißt Mantisse.

Zusatz 1. Die ersten drei der obigen Sätze gelten nicht bloß für die Basis 10, sondern auch für jede andere Zahl, mithin auch für jedes andere Logarithmensystem.

Zusatz 2. Die Mantisse des briggischen Logarithmus einer Zahl hängt nur von dem Vorhandenseyn bestimmter Ziffern in derselben, die Charakteristik von deren Localwerth ab. Z. B.

$$\log. 6485 = 3{,}81191$$
$$\log. 648500 = \log. (6485.100) = \log. 6485 + \log. 100 \;(\S. 75. 1^0)$$
$$= 3{,}81191 + 2 = 5{,}81191$$
$$\log. 64{,}85 = \log. \left(\frac{6485}{100}\right) = \log. 6485 - \log. 100 \;(\S. 75. 2^0)$$
$$= 3{,}81191 - 2 = 1{,}81191$$
$$\log. 0{,}6485 = \log. 6485 - \log. 10000 = 3{,}81191 - 4 = 0{,}81191 - 1$$
$$\log. 0{,}06485 = \log. 6485 - \log. 100000 = 3{,}81191 - 5 = 0{,}81191 - 2$$

Zusatz 3. Für die beiden letzten Beispiele könnte zwar die durch Beifügung einer negativen Zahl angezeigte Subtraction wirklich vorgenommen werden, welche dann eine am Anfange mit dem Zeichen minus versehene Differenz (nach $2^0$) geben würde. Doch zieht man es bei Bestimmung des Logarithmus eines ohne Ganze gegebenen Decimalbruches vor, am Anfange 0 als

Charakteristik und am Ende eine negative Zahl von so vielen Einheiten zu setzen, als den bedeutsamen Ziffern Nullen (als Zeichen von keinen Ganzen, keinen Zehnteln ꝛc.) vorangehen.

## Erläuterung und Gebrauch der am Ende beigefügten Logarithmentafeln.

### §. 78.

Erklärung.

Die am Ende beigefügten Tafeln enthalten die gemeinen Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 10000 unmittelbar, von 10000 bis 1000000 mittelbar, mit 5 Decimalstellen der Mantisse. Die natürlichen Zahlen von 1 bis 100 sammt den hiezugehörigen Logarithmen sind in den entsprechend bezeichneten Spalten der ersten Seite der Tafeln enthalten. Die Zahlen von 1 — 999 stehen in den jedesmaligen ersten verticalen, mit Z bezeichneten Spalten der folgenden Seiten; für eine vierzifferige Zahl gelten die nämlichen Ziffern als die höchsten drei, eine der in der obersten horizontalen Zeile stehenden Ziffern gilt als vierte Ziffer. Die Charakteristik der Logarithmen ist von der Zahl 100 angefangen nicht beigefügt, da sie nach §. 77. 5° leicht ergänzt werden kann. Die Mantisse der Logarithmen ist für Zahlen von 100 — 1000 in der zunächst stehenden mit 0 bezeichneten Spalte vollständig angegeben, wobei die drei letzten Ziffern mit der Zahl immer in der nämlichen horizontalen Zeile, die zwei ersten Ziffern etwas abgesondert, öfters auch oberhalb, stehen. Für die vierzifferigen Zahlen sind die drei letzten Ziffern der Mantisse da zu suchen, wo die horizontale Zeile der drei ersten Ziffern der Zahl mit der verticalen Spalte der vierten Ziffer zusammentrifft; die zwei ersten Ziffern der Mantisse in der mit 0 bezeichneten Spalte etwas abgesondert, entweder in der Zeile der drei ersten Ziffern der natürlichen Zahl; oder, wenn daselbst keine Ziffern stehen, so sind es die zunächst oberen, manchmal auch die zunächst unteren, wenn nämlich die drei letzten Ziffern mit einem Sternchen bezeichnet sind. Z. B. log. 3874 = 3,58816; log. 3988 = 3,60076.

### §. 79.

Aufgabe. Den Logarithmus einer fünf- oder sechszifferigen Zahl zu finden.

**Auflösung.** Man bestimme

1) dafür die Charakteristik nach §. 77. 5°;

2) suche man zu den vier ersten Ziffern der Zahl nach §. 78. die Mantisse;

3) multiplicire man die Differenz zwischen den Logarithmen der nächst größeren und gegebenen (vierzifferigen) Zahl mit der letzten oder den zwei letzten Ziffern der gegebenen als Decimalen;

4) addire man die ganze Zahl des Productes zu der nach 2° gefundenen Mantisse.

**Beispiele.** Man bestimme den Logarithmus I. von 35647; II. von 53,6358.

**Berechnung.**

I. a) Charakteristik: 4

b) $\log. 3565 = 3,55206$

$\log. 3564 = 3,55194$

$12$

c) $12 \times 0,7 = 8,4$

d) $\log. 3564 = 3,55194$

wegen 7 $\quad 8$

$\log. 35647 = 4,55202$

II. a) Charakteristik: 1

b) $\log. 5364 = 3,72949$

$\log. 5363 = 3,72941$

$8$

c) $8 \times 0,58 = 4,64$ oder nahezu $= 5$*

d) $\log. 5363 = 3,72941$

wegen 58 $\quad 5$

$\log. 53,6358 = 1,72946$

* Man vermehrt immer das Summand (den Proportionaltheil) um 1, wenn die erste hinweggelassene Decimale größer ist als 5.

**Beweis.** Die Vergleichung der Logarithmen von Zahlen, welche nur sehr wenig von einander verschieden sind, gibt den Erfahrungssatz, daß die Differenzen solcher Zahlen ziemlich genau den Differenzen ihrer Logarithmen proportional seyen; darnach für das erste Beispiel die Berechnung ausführlicher:

| | | |
|---|---|---|
| | $\log. 35650 = 4,55206$ | $\log. 35647 = 4,55194 + d$ |
| | $\log. 35640 = 4,55194$ | $\log. 35640 = 4,55194$ |
| Differenzen | $10 \quad 0,00012$ | $7 \quad d$ |

$$10 : 7 = 0,00012 : d$$

$$1 : 0,7 = 0,00012 : d = 0,000084$$

$$\log. 35647 = 4,55194 + 0,00008 (4 = 4,55202.$$

Zusatz. Hat die gegebene Zahl mehr als 6 Ziffern, so können die nach diesen folgenden nur auf die Charakteristik, aber nicht mehr auf die fünfzifferige Mantisse Einfluß haben. Z. B. log. 536358245 ist wie log. 536358000 = 8,72946.

## §. 80.

Aufgabe. Für einen gegebenen Logarithmus die entsprechende Zahl zu finden.

Auflösung. 1) Man suche, ohne vorerst auf die Charakteristik Rücksicht zu nehmen, die zwei ersten Ziffern der Mantisse in der mit 0 bezeichneten Spalte, die drei übrigen in der nämlichen oder auch in einer der übrigen zu jenen Ziffern gehörigen Spalten. Ist die Mantisse vollständig in den Tafeln enthalten, so stehen die drei ersten Ziffern der entsprechenden Zahl in der mit Z. bezeichneten Spalte, und zwar in der nämlichen Zeile mit den drei letzten Ziffern der Mantisse; die vierte Ziffer aber ist die Ueberschrift der Spalte, worin die drei letzten Ziffern der Mantisse stehen.

2) Findet sich die Mantisse nicht vollständig in den Tafeln, so bestimme man nach 1⁰ die ersten vier Ziffern der Zahl nach der nächst kleineren Mantisse, ziehe letztere von der Mantisse des gegebenen Logarithmus ab, hänge an die Differenz 1 oder 2 Nullen, und dividire dieselbe durch die Differenz zwischen der nächst größeren und kleineren Mantisse. Der Quotient gibt die fünfte und sechste Ziffer der Zahl.

3) Zuletzt bestimme man nach §. 77. 5⁰ den Localwerth der gefundenen Ziffern.

Beispiel. Zu welcher Zahl gehört 2,63219 als Logarithmus?

Berechnung und Beweis.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | 2,63219 = log. x | b) | 2,63225 = log. 428,8 |
| | 2,63215 = log. 428,7 | | 2,63215 = log. 428,7 |
| Differenzen: | 4 | | 10 |
| eigentl. | 0,00004 d | | 0,00010 0,1 |

c) 40 : 10 = 4

daher 2,63219 = log. 428,74

Nach der Proportion §. 79. aber

c) $0{,}1 : d = 0{,}00010 : 0{,}00004$
$$0{,}1 : d = 10 : 4$$
$$1 : d = 100 : 4$$
$$d = \tfrac{4}{100} = 0{,}04$$

Also $2{,}63219 = \log.\ (428{,}7 + 0{,}04) = \log.\ 428{,}74.$

Anmerkung. Die bei den Aufgaben des §. 79. und 80. nöthigen Rechnungen lassen sich nach den angegebenen Regeln (ohne Proportionalansatz) bei einiger Uebung leicht in Gedanken ausführen.

## Aufgaben für Logarithmenrechnung.

§. 81.

1. Man verwandle 1217 Duodecimal-Kubiklinien in Decimal-Kubiklinien.

Lösung. $$1217^{c'''}dd = \frac{1217^{c'}}{(1728)^2}$$

$$\log.\ \frac{1217}{(1728)^2} = \underset{+4}{\log.\ 1217} - \underset{-4}{2 \log.\ 1728}$$

$$\log.\ 1217 = 3{,}08529$$

$$2 \log.\ 1728 = 2 . 3{,}23754 = 6{,}47508$$

$$\log.\ \frac{1217}{(1728)^2} = 0{,}61021 - 4$$

$$\frac{1217^{c'}}{(1728)^2} = 0{,}00040758^{c'}$$

Also $1217^{c'''}dd = 407{,}58^{c'''}d.$

Obige Subtraction gäbe, auf gewöhnliche Art vorgenommen, einen negativen Rest. Um die in §. 77. Zusatz 3. angegebene Form zu erhalten, wurde zur Charakteristik des Minuends eine Zahl von so vielen Einheiten addirt, daß das Subtrahend davon abgezogen werden konnte, und zum Minuend (oder Rest) die nämliche Zahl negativ beigefügt, wodurch der Werth der Differenz nicht geändert wurde.

2. Man ziehe die Kubikwurzel aus 0,0561.

Lösung. $$\log.\ \sqrt[3]{0{,}0561} = \frac{\log.\ 0{,}0561}{3}$$

$$= \frac{0{,}74896 - 2}{3}$$

Damit die angehängte negative Zahl dividirt werden kann, muß zu ihr noch — 1 gezählt, dagegen auch zur Charakteristik + 1 addirt werden. Daher

$$\log. \sqrt[8]{0{,}0561} = \frac{1{,}74896 - 3}{3} = 0{,}58299 - 1$$

$$\sqrt[8]{0{,}0561} = 0{,}382816.$$

3. Ein Pariser Kubikfuß destillirtes Wasser wiegt in der Luft bei 10° R. 69 ℔. 14 Unzen Pariser poids de marc; wie viel wiegt nun davon 1 bayer. Kubikfuß im bayerischen Gewichte? Es hat aber 1 Par. Fuß 324,839, 1 bayer. Fuß 291,859 Millimetres; 1 Par. ℔. 489509, 1 bayer. ℔. 560000 Milligrammes. (Vgl. Weigl, Rechenkunst IV. Aufl. II. Abth. I. u. VI. Tab.)

Lösung. 1c′ P. : 1c′ b. = $(324{,}839)^3 : (291{,}859)^3$
$(324{,}839)^3$ b. K. F. = $(291{,}859)^3$ P. K. F.
1 P. ℔. : 1 b. ℔. = 489509 : 560000
489509 b. ℔. = 560000 P. ℔.

| | |
|---|---|
| b. ℔. x | 1c′ b. |
| P. 1c′ | 69,875 P. ℔. |
| P. ℔. 560000 | 489509 b. ℔. |
| b. K. F. $(324{,}839)^3$ | $(291{,}859)^3$ P. K. F. |

$$x = \frac{69{,}875 \times 489509 \times (291{,}859)^3}{560000 \times (324{,}839)^3}$$

$$\log.x = \log.69{,}875 + l.489509 + 3l.291{,}859 - (l.560000 + 3l.324{,}839)$$

| | |
|---|---|
| log. 69,875 = 1,84432 | log. 560000 = 5,74819 |
| log. 489509 = 5,68976 | 3 log. 324,839 = 7,53501 |
| 3 log. 291,859 = 7,39551 | 13,28320 |
| log. des Zählers = 14,92959 | |
| log. des Nenners = 13,28320 | |
| log. x = 1,64639 | |

x = 44,299 ℔. b. = 44 ℔. 9,568 Loth.

4. Ein Kaufmann erhält 45 Centner 48½ ℔. preußischen Gewichts brutto um 3560 pr. Thlr. 15 Gr. Um wie viel Gulden muß er 1 ℔. bayer. netto geben, wenn er 10 p. c. gewinnen will, da 9 ℔. Tara auf den Centner bedungen sind, 1 Ct. pr. = 110 ℔, 1 pr. ℔. = 46860 Milligr., 1 b. ℔. = 560000 Milligrammes?

| | | |
|---|---|---|
| Lösung. | Verk. fl. x | 1 ℔. bayer. netto |
| | br. pr. ℔. 4998,5 | 3560,5 Thlr. Eink. |
| | b. ℔. 468620 | 560000 pr. ℔. |
| | netto ℔. 100 | 109 ℔. br. |
| | Eink. fl. 100 | 110 fl. Verk. |
| | pr. Thlr. 1 | 1,75 fl. |

$$x = \frac{3560,5 . 56\not{0}\not{0}\not{0}\not{0} . 109 . 11\not{0} . 1,75}{4998,5 . 46862\not{0} . 1\not{0}\not{0} . 1\not{0}\not{0}}$$

$$\log . x = l.3560,5 + l.56 + l.109 + l.11 + l.1,75 - (l.4998,5 + l.46862)$$

log. 3560,5 = 3,55151
log. 56 = 1,74819
log. 109 = 2,03743
log. 11 = 1,04139
log. 1,75 = 0,24304

log. 4998,5 = 3,69884
log. 46862 = 4,67082
8,36966

log. des Zählers = 8,62156
log. des Nenners = 8,36966
log. x = 0,25190
x = 1,786 fl. = 1 fl. 47 kr. 1 Hll.

5. Einem Spione versprach man für die erste Minute seines Aufenthaltes im feindlichen Lager, um wichtige Nachrichten einzuziehen, 1 fl., für die zweite 2 fl., und für jede folgende das Doppelte. Er war glücklich und erhielt 32767 fl. Wie lange war er im Lager geblieben?

Lösung. Substituirt man in die Summenformel einer geometrischen Progression:

$$S = \frac{aq^n - a}{q - 1}, \text{ so ist}$$

$$32767 = \frac{1 . 2^n - 1}{2 - 1}$$

$$2^n = 32768$$

$$n \log . 2 = \log . 32768$$

$$n = \frac{\log . 32768}{\log . 2} = \frac{4,51545}{0,30103} = 15 \text{ Minuten} = \tfrac{1}{4} \text{ Stunde.}$$

6. Aus dem Umfange des Erdäquators $p = 15^{M} \times 360^{0} = 5400$ geogr. Meilen dessen Durchmesser d, und hieraus den Kubikinhalt K und die Oberfläche S der Erde (als einer Kugel) zu finden.

Lösung. a) $d = \frac{p}{\pi}$, also

$\log. d = \log. 5400 - \log. 3,14159 = 3,73239 - 0,49715 = 3,23524$

$d = 1718,9$ geogr. Meilen,

b) $K = \frac{d^3\pi}{6}$

$\log. K = 3 \log. 1718,9 + \log. 3,14159 - \log. 6 = 9,42472$

$K = 2659000000$ Kubikmeilen,

c) $S = d^2\pi$

$\log. S = 2 \log. 1718,9 + \log. 3,14159 = 6,96763$

$S = 9281800$ geogr. □ Meilen.

7. Den Kubikinhalt K eines Tonnengewölbes aus dessen äußerem Durchmesser = D, innerem Durchmesser = d und Länge = L zu bestimmen.

Lösung. Derselbe ist gleich der Differenz zwischen einem halben Zylinder vom Durchmesser D und der Länge L und einem halben Zylinder vom Durchmesser d und der nämlichen Länge L; also

$$K = \frac{D^2\pi.L}{4.2} - \frac{d^2\pi.L}{4.2} = \frac{(D^2 - d^2)\pi L}{8}$$

$$= \frac{(D + d)(D - d)\pi L}{8}$$

$$\log. K = \log. (D+d) + \log. (D-d) + \log. \pi + \log. L - \log. 8$$

Es sey $D = 30'4''$, $d = 26'6''$, $L = 68,9''$ Duodec., so ist

$D + d = 30'4'' + 26'6'' = 56,833' \ldots$ (Weigl I. Th. §. 77.)

$D - d = 30'4'' - 26'6'' = 3,833' \ldots$

$L = 68'9'' = 68,75'$

$\log. K = \log. 56,833 + \log. 3,833 + \log. 3,14159 + \log. 68,75 - \log. 8$

| | | |
|---|---|---|
| log. 56,833 | = | 1,75460 |
| log. 3,833 | = | 0,58354 |
| log. π | = | 0,49715 |
| log. 68,75 | = | 1,83727 |
| | | 4,67256 |
| log. 8 | = | 0,90309 |
| log. K | = | 3,76947 |

$K = 5881,25^{c'} = 5881^{c'}\ 432^{c''}$.

## Anwendung der Logarithmen auf Zins-Zinsenrechnung.

### §. 82.

**Erklärung.** Gibt A dem B eine Summe Geld K zur Benützung unter der Bedingung, daß dieser sie nach einer gewissen Zeit zurückbezahle, und für die Benützung während der Zwischenzeit, in der Regel nach einem Jahre und im Verhältnisse zu Hundert (Procent), eine Summe z gebe; so heißt A der Gläubiger, B der Schuldner, die Summe K Capital, die Summe z Zinsen. Die Zinsen heißen einfache, wenn sie jährlich zurückbezahlt, oder einige Jahre hindurch, ohne Benützung als Capital, gesammelt werden; zusammengesetzte oder Zinszinsen, wenn sie jährlich zum Capitale geschlagen und zugleich mit diesem verzinset werden.

**Anmerkung.** Die Zinszinsen sind zwar in der Regel verboten, doch gibt es einige Fälle, in welchen sie berechnet werden, z. B. bei Sparkassen, Renten ꝛc., oder in welchen die dafür geltenden Formeln zur Anwendung kommen, z. B. bei dem Wachsthume einer Waldung, der Zunahme der Bevölkerung u. s. w.

### §. 83.

**Lehrsatz.** Wird das Capital K zu p Procent auf Zinszinsen ausgeliehen, so wird es, 100 = c gesetzt, nach n Jahren:

$$S = K\left(\frac{c+p}{c}\right)^n$$

**Beweis.** 1. Die Zinsen z des ersten Jahres werden berechnet:

$$c : K = p : z = \frac{Kp}{c}.$$

2. Capital und Zinsen $A = K + \frac{Kp}{c} = K\left(\frac{c+p}{c}\right)$.

3. Diese Summe A ist im zweiten Jahre zu verzinsen, tritt also hiefür an die Stelle von K; es ist demnach die Summe des Capitals und der Zinsen

$$B = A\left(\frac{c+p}{c}\right) = K\left(\frac{c+p}{c}\right)\left(\frac{c+p}{c}\right) = K\left(\frac{c+p}{c}\right)^2.$$

4. B ist für das dritte Jahr zu verzinsendes Capital, daher dieses sammt den treffenden Zinsen:

$$C = B\left(\frac{c+p}{c}\right) = K\left(\frac{c+p}{c}\right)^2\left(\frac{c+p}{c}\right) = K\left(\frac{c+p}{c}\right)^3.$$

5. Auf gleiche Art sind Capital und Zinsen am Ende des vierten Jahres

$$D = C\left(\frac{c+p}{c}\right) = K\left(\frac{c+p}{c}\right)^4$$

6. Und so allgemein nach n Jahren

$$S = K\left(\frac{c+p}{c}\right)^n$$

## §. 84.

### Nach der Zinszinsenrechnung zu lösende Aufgaben.

1. Es werden 500 fl. in eine Sparkasse gelegt, welche Zinszinsen zu $3\frac{1}{4}$ % bezahlt; welches ist der Werth jener Summe nach 20 Jahren?

Lösung. $S = 500\left(\frac{100 + 3{,}25}{100}\right)^{20} = 500 \cdot 1{,}0325^{20}$

$$\log. S = \log. 500 + 20 \log. 1{,}0325$$
$$\log. S = 2{,}97677$$
$$S = 947{,}92 \text{ fl.} = 947 \text{ fl. } 55 \text{ kr. } 1 \text{ Hll.}$$

2. Jemand ist nach 10 Jahren 10000 fl. zu zahlen schuldig, welches ist der baare Werth, das Disconto (nach Zinszinsen) zu 4 % gerechnet?

Lösung. Vergl. Aufg. 7. des §. 41. Hier ist von obiger Formel K unbekannte Größe, und zwar

$$K = S.\left(\frac{c}{c+p}\right)^n$$

$$K = 10000.\left(\frac{100}{100+4}\right)^{10} = 10000 \cdot (0{,}961538)^{10}$$

$$\log. K = \log. 10000 + 10 \log. 0{,}961538$$
$$\log. K = 4 + 10\,(0{,}98297 - 1) = 3{,}82970$$
$$K = 6756{,}1 \text{ fl.} = 6756 \text{ fl. } 12 \text{ kr.}$$

3. Die Volkszahl einer Stadt ist in 18 Jahren von 20000 auf 28565 gestiegen. Wie viel Procent betrug in jedem Jahre die Zunahme?

Lösung. $28565 = 20000 \left(\frac{100 + p}{100}\right)^{18}$

$$\log. 28565 = \log. 20000 + 18 \log. \left(\frac{100 + p}{100}\right)$$

$$\log. \left(\frac{100 + p}{100}\right) = \frac{\log. 28565 - \log. 20000}{18}$$

$$= \frac{4{,}45583 - 4{,}30103}{18} = 0{,}00860$$

$$\frac{100 + p}{100} = 1{,}02$$

$$p = 2$$

4. In wie viel Jahren wird eine Waldung, welche zu 30000 Klaftern geschätzt ist, und jährlich um $1\frac{3}{4}$% zunimmt, so herangewachsen seyn, daß sie 34470 Klafter hält?

$$34470 = 30000 \left(\frac{100 + 1{,}75}{100}\right)^{n}$$

$$\log. 34470 = \log. 30000 + n \log. (1{,}0175)$$

$$n = \frac{\log. 34470 - \log. 30000}{\log. 1{,}0175}$$

$$n = \frac{4{,}53744 - 4{,}47712}{0{,}00753} = 8 \text{ Jahre.}$$

5. Jemand genießt eine jährliche Rente von 1000 fl., die schon jetzt anfängt, und 20 Jahre dauert. Er will sie aber jetzt für baares Geld zu 5% verkaufen. Wie viel kann er mit Recht verlangen?

Lösung. Der Gesammtwerth x ist dem baaren Werthe der jetzt und nach 1, 2, 3... Jahren fälligen Renten gleich. Die erste Rente ist jetzt schon 1000 fl., die zweite $1000 . \frac{100}{105}$ $= 1000 . \frac{20}{21}$ (Aufg. 2.), die dritte $1000 . \left(\frac{20}{21}\right)^2$ u. s. w. werth, Daher

$$x = 1000 + 1000 . \frac{20}{21} + 1000 . \left(\frac{20}{21}\right)^2 + \ldots\ldots 1000 . \left(\frac{20}{21}\right)^{19}$$

Die Glieder der zweiten Seite der Gleichung bilden eine fallende geometrische Progression, worin $a = 1000$, $z = 1000 . \left(\frac{20}{21}\right)^{19}$, $q = \frac{20}{21}$, also

$$S = \frac{1000 - 1000.(\frac{20}{21})^{19}\frac{20}{21}}{1 - \frac{20}{21}} = (1000 - 1000.[\tfrac{20}{21}]^{20})21$$

$$x = (1 - [\tfrac{20}{21}]^{20}).\ 21000$$

$$\log.(\tfrac{20}{21})^{20} = 20(\log.20 - \log.21) = 20(0{,}97881 - 1) = 0{,}57620 - 1$$

$$(\tfrac{20}{21})^{20} = 0{,}37688$$

$$x = (1 - 0{,}37688)\ 21000 = 0{,}62312.\ 21000$$

$$\log.\ x = \log.\ 0{,}62312 + \log.\ 21000 = 4{,}11679$$

$$x = 13085.$$

6. Jemand ist für ein gekauftes Gut 40000 fl. zu zahlen schuldig; er wünscht aber diese Schuld in 12 jährigen Terminen zu gleichen Theilen abzutragen. Wie viel muß er jährlich zahlen, wenn die Termingelder nach Zinszinsen zu 5 % discontirt werden sollen?

Lösung. Der baare Werth der einzelnen Termingelder muß dem bereits fälligen Kaufschillinge gleich seyn. Der baare Werth des nach dem ersten Jahre zu zahlenden Termingeldes $x$ ist $x.\frac{20}{21}$, des zweiten $x\,(\frac{20}{21})^2$ u. s. w. Also

$$40000 = x.\tfrac{20}{21} + x.(\tfrac{20}{21})^2 + x.(\tfrac{20}{21})^3 + \ldots\ldots\ x(\tfrac{20}{21})^{12}$$

$$= x.[\tfrac{20}{21} + (\tfrac{20}{21})^2 + (\tfrac{20}{21})^3 + \ldots\ldots\ (\tfrac{20}{21})^{12}]$$

Die in Klammern stehenden Glieder bilden eine abnehmende geometrische Progression, deren Summe

$$S = \frac{\frac{20}{21} - (\frac{20}{21})^{13}}{1 - \frac{20}{21}} = 20 - \frac{20^{13}}{21^{12}}$$

Man substituire nun diesen Ausdruck in obige Gleichung:

$$40000 = x\left(20 - \frac{20^{13}}{21^{12}}\right)$$

$$\log.\left(\frac{20^{13}}{21^{12}}\right) = 13\ \log.\ 20 - 12\ \log.\ 21 = 1{,}04675$$

$$\frac{20^{13}}{21^{12}} = 11{,}136$$

$$40000 = x(20 - 11{,}136) = x.\ 8{,}864$$

$$x = \frac{40000}{8{,}864} = 4513\ \text{fl.}$$

# Anhang.

## Tafeln der gemeinen oder briggischen Logarithmen

für

alle natürlichen Zahlen

von

1 bis 10000.

| Z. | Logarithmen | Z. | Logarithmen | Z. | Logarithmen | Z. | Logarithmen |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | — ∞ | 25 | 1,39794 | 50 | 1,69897 | 75 | 1,87506 |
| 1 | 0,00000 | 26 | 1,41497 | 51 | 1,70757 | 76 | 1,88081 |
| 2 | 0,30103 | 27 | 1,43136 | 52 | 1,71600 | 77 | 1,88649 |
| 3 | 0,47712 | 28 | 1,44716 | 53 | 1,72428 | 78 | 1,89209 |
| 4 | 0,60206 | 29 | 1,46240 | 54 | 1,73239 | 79 | 1,89763 |
| 5 | 0,69897 | 30 | 1,47712 | 55 | 1,74036 | 80 | 1,90309 |
| 6 | 0,77815 | 31 | 1,49136 | 56 | 1,74819 | 81 | 1,90849 |
| 7 | 0,84510 | 32 | 1,50515 | 57 | 1,75587 | 82 | 1,91381 |
| 8 | 0,90309 | 33 | 1,51851 | 58 | 1,76343 | 83 | 1,91908 |
| 9 | 0,95424 | 34 | 1,53148 | 59 | 1,77085 | 84 | 1,92428 |
| 10 | 1,00000 | 35 | 1,54407 | 60 | 1,77815 | 85 | 1,92942 |
| 11 | 1,04139 | 36 | 1,55630 | 61 | 1,78533 | 86 | 1,93450 |
| 12 | 1,07918 | 37 | 1,56820 | 62 | 1,79239 | 87 | 1,93952 |
| 13 | 1,11394 | 38 | 1,57978 | 63 | 1,79934 | 88 | 1,94448 |
| 14 | 1,14613 | 39 | 1,59106 | 64 | 1,80618 | 89 | 1,94939 |
| 15 | 1,17609 | 40 | 1,60206 | 65 | 1,81291 | 90 | 1,95424 |
| 16 | 1,20412 | 41 | 1,61278 | 66 | 1,81954 | 91 | 1,95904 |
| 17 | 1,23045 | 42 | 1,62325 | 67 | 1,82607 | 92 | 1,96379 |
| 18 | 1,25527 | 43 | 1,63347 | 68 | 1,83251 | 93 | 1,96848 |
| 19 | 1,27875 | 44 | 1,64345 | 69 | 1,83885 | 94 | 1,97313 |
| 20 | 1,30103 | 45 | 1,65321 | 70 | 1,84510 | 95 | 1,97772 |
| 21 | 1,32222 | 46 | 1,66276 | 71 | 1,85126 | 96 | 1,98227 |
| 22 | 1,34242 | 47 | 1,67210 | 72 | 1,85733 | 97 | 1,98677 |
| 23 | 1,36173 | 48 | 1,68124 | 73 | 1,86332 | 98 | 1,99123 |
| 24 | 1,38021 | 49 | 1,69020 | 74 | 1,86923 | 99 | 1,99564 |

| Z. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 | 00 000 | 043 | 087 | 130 | 173 | 217 | 260 | 303 | 346 | 389 |
| 101 | 432 | 475 | 518 | 561 | 604 | 647 | 689 | 732 | 775 | 817 |
| 102 | 860 | 903 | 945 | 988 | *030 | *072 | *115 | *157 | *199 | *242 |
| 103 | 01 284 | 326 | 368 | 410 | 452 | 494 | 536 | 578 | 620 | 662 |
| 104 | 703 | 745 | 787 | 828 | 870 | 912 | 953 | 995 | *036 | *078 |
| 105 | 02 119 | 160 | 202 | 243 | 284 | 325 | 366 | 407 | 449 | 490 |
| 106 | 531 | 572 | 612 | 653 | 694 | 735 | 776 | 816 | 857 | 898 |
| 107 | 938 | 979 | *019 | *060 | *100 | *141 | *181 | *222 | *262 | *302 |
| 108 | 03 342 | 383 | 423 | 463 | 503 | 543 | 583 | 623 | 663 | 703 |
| 109 | 743 | 782 | 822 | 862 | 902 | 941 | 981 | *021 | *060 | *100 |
| 110 | 04 139 | 179 | 218 | 258 | 297 | 336 | 376 | 415 | 454 | 493 |
| 111 | 532 | 571 | 610 | 650 | 689 | 727 | 766 | 805 | 844 | 883 |
| 112 | 922 | 961 | 999 | *038 | *077 | *115 | *154 | *192 | *231 | *269 |
| 113 | 05 308 | 346 | 385 | 423 | 461 | 500 | 538 | 576 | 614 | 652 |
| 114 | 690 | 729 | 767 | 805 | 843 | 881 | 918 | 956 | 994 | *032 |
| 115 | 06 070 | 108 | 145 | 183 | 221 | 258 | 296 | 333 | 371 | 408 |
| 116 | 446 | 483 | 521 | 558 | 595 | 633 | 670 | 707 | 744 | 781 |
| 117 | 819 | 856 | 893 | 930 | 967 | *004 | *041 | *078 | *115 | *151 |
| 118 | 07 188 | 225 | 262 | 298 | 335 | 372 | 408 | 445 | 482 | 518 |
| 119 | 555 | 591 | 628 | 664 | 700 | 737 | 773 | 809 | 846 | 882 |
| 120 | 918 | 954 | 990 | *027 | *063 | *099 | *135 | *171 | *207 | *243 |
| 121 | 08 279 | 314 | 350 | 386 | 422 | 458 | 493 | 529 | 565 | 600 |
| 122 | 636 | 672 | 707 | 743 | 778 | 814 | 849 | 884 | 920 | 955 |
| 123 | 991 | *026 | *061 | *096 | *132 | *167 | *202 | *237 | *272 | *307 |
| 124 | 09 342 | 377 | 412 | 447 | 482 | 517 | 552 | 587 | 621 | 656 |
| 125 | 691 | 726 | 760 | 795 | 830 | 864 | 899 | 934 | 968 | *003 |
| 126 | 10 037 | 072 | 106 | 140 | 175 | 209 | 243 | 278 | 312 | 346 |
| 127 | 380 | 415 | 449 | 483 | 517 | 551 | 585 | 619 | 653 | 687 |
| 128 | 721 | 755 | 789 | 823 | 857 | 890 | 924 | 958 | 992 | *025 |
| 129 | 11 059 | 093 | 126 | 160 | 193 | 227 | 261 | 294 | 327 | 361 |
| 130 | 394 | 428 | 461 | 494 | 528 | 561 | 594 | 628 | 661 | 694 |
| 131 | 727 | 760 | 793 | 826 | 860 | 893 | 926 | 959 | 992 | *024 |
| 132 | 12 057 | 090 | 123 | 156 | 189 | 222 | 254 | 287 | 320 | 352 |
| 133 | 385 | 418 | 450 | 483 | 516 | 548 | 581 | 613 | 646 | 678 |
| 134 | 710 | 743 | 775 | 808 | 840 | 872 | 905 | 937 | 969 | *001 |
| 135 | 13 033 | 066 | 098 | 130 | 162 | 194 | 226 | 258 | 290 | 322 |
| 136 | 354 | 386 | 418 | 450 | 481 | 513 | 545 | 577 | 609 | 640 |
| 137 | 672 | 704 | 735 | 767 | 799 | 830 | 862 | 893 | 925 | 956 |
| 138 | 988 | *019 | *051 | *082 | *114 | *145 | *176 | *208 | *239 | *270 |
| 139 | 14 301 | 333 | 364 | 395 | 426 | 457 | 489 | 520 | 551 | 582 |
| 140 | 613 | 644 | 675 | 706 | 737 | 768 | 799 | 829 | 860 | 891 |
| 141 | 922 | 953 | 983 | *014 | *045 | *076 | *106 | *137 | *168 | *198 |
| 142 | 15 229 | 259 | 290 | 320 | 351 | 381 | 412 | 442 | 473 | 503 |
| 143 | 534 | 564 | 594 | 625 | 655 | 685 | 715 | 746 | 776 | 806 |
| 144 | 836 | 866 | 897 | 927 | 957 | 987 | *017 | *047 | *077 | *107 |



BSB MÜNCHEN

| З. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 145 | 16 137 | 167 | 197 | 227 | 256 | 286 | 316 | 346 | 376 | 406 |
| 146 | 435 | 465 | 495 | 524 | 554 | 584 | 613 | 643 | 673 | 702 |
| 147 | 732 | 761 | 791 | 820 | 850 | 879 | 909 | 938 | 967 | 997 |
| 148 | 17 026 | 056 | 085 | 114 | 143 | 173 | 202 | 231 | 260 | 289 |
| 149 | 319 | 348 | 377 | 406 | 435 | 464 | 493 | 522 | 551 | 580 |
| 150 | 609 | 638 | 667 | 696 | 725 | 754 | 782 | 811 | 840 | 869 |
| 151 | 898 | 926 | 955 | 984 | *013 | *041 | *070 | *099 | *127 | *156 |
| 152 | 18 184 | 213 | 241 | 270 | 298 | 327 | 355 | 384 | 412 | 441 |
| 153 | 469 | 498 | 526 | 554 | 583 | 611 | 639 | 667 | 696 | 724 |
| 154 | 752 | 780 | 808 | 837 | 865 | 893 | 921 | 949 | 977 | *005 |
| 155 | 19 033 | 061 | 089 | 117 | 145 | 173 | 201 | 229 | 257 | 285 |
| 156 | 312 | 340 | 368 | 396 | 424 | 451 | 479 | 507 | 535 | 562 |
| 157 | 590 | 618 | 645 | 673 | 700 | 728 | 756 | 783 | 811 | 838 |
| 158 | 866 | 893 | 921 | 948 | 976 | *003 | *030 | *058 | *085 | *112 |
| 159 | 20 140 | 167 | 194 | 222 | 249 | 276 | 303 | 330 | 358 | 385 |
| 160 | 412 | 439 | 466 | 493 | 520 | 548 | 575 | 602 | 629 | 656 |
| 161 | 683 | 710 | 737 | 763 | 790 | 817 | 844 | 871 | 898 | 925 |
| 162 | 952 | 978 | *005 | *032 | *059 | *085 | *112 | *139 | *165 | *192 |
| 163 | 21 219 | 245 | 272 | 299 | 325 | 352 | 378 | 405 | 431 | 458 |
| 164 | 484 | 511 | 537 | 564 | 590 | 617 | 643 | 669 | 696 | 722 |
| 165 | 748 | 775 | 801 | 827 | 854 | 880 | 906 | 932 | 958 | 985 |
| 166 | 22 011 | 037 | 063 | 089 | 115 | 141 | 167 | 194 | 220 | 246 |
| 167 | 272 | 298 | 324 | 350 | 376 | 401 | 427 | 453 | 479 | 505 |
| 168 | 531 | 557 | 583 | 608 | 634 | 660 | 686 | 712 | 737 | 763 |
| 169 | 789 | 814 | 840 | 866 | 891 | 917 | 943 | 968 | 994 | *019 |
| 170 | 23 045 | 070 | 096 | 121 | 147 | 172 | 198 | 223 | 249 | 274 |
| 171 | 300 | 325 | 350 | 376 | 401 | 426 | 452 | 477 | 502 | 528 |
| 172 | 553 | 578 | 603 | 629 | 654 | 679 | 704 | 729 | 754 | 779 |
| 173 | 805 | 830 | 855 | 880 | 905 | 930 | 955 | 980 | *005 | *030 |
| 174 | 24 055 | 080 | 105 | 130 | 155 | 180 | 204 | 229 | 254 | 279 |
| 175 | 304 | 329 | 353 | 378 | 403 | 428 | 452 | 477 | 502 | 527 |
| 176 | 551 | 576 | 601 | 625 | 650 | 674 | 699 | 724 | 748 | 773 |
| 177 | 797 | 822 | 846 | 871 | 895 | 920 | 944 | 969 | 993 | *018 |
| 178 | 25 042 | 066 | 091 | 115 | 139 | 164 | 188 | 212 | 237 | 261 |
| 179 | 285 | 310 | 334 | 358 | 382 | 406 | 431 | 455 | 479 | 503 |
| 180 | 527 | 551 | 575 | 600 | 624 | 648 | 672 | 696 | 720 | 744 |
| 181 | 768 | 792 | 816 | 840 | 864 | 888 | 912 | 935 | 959 | 983 |
| 182 | 26 007 | 031 | 055 | 079 | 102 | 126 | 150 | 174 | 198 | 221 |
| 183 | 245 | 269 | 293 | 316 | 340 | 364 | 387 | 411 | 435 | 458 |
| 184 | 482 | 505 | 529 | 553 | 576 | 600 | 623 | 647 | 670 | 694 |
| 185 | 717 | 741 | 764 | 788 | 811 | 834 | 858 | 881 | 905 | 928 |
| 186 | 951 | 975 | 998 | *021 | *045 | *068 | *091 | *114 | *138 | *161 |
| 187 | 27 184 | 207 | 231 | 254 | 277 | 300 | 323 | 346 | 370 | 393 |
| 188 | 416 | 439 | 462 | 485 | 508 | 531 | 554 | 577 | 600 | 623 |
| 189 | 646 | 669 | 692 | 715 | 738 | 761 | 784 | 807 | 830 | 852 |

| Z. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 190 | 27 875 | 898 | 921 | 944 | 967 | 989 | *012 | *035 | *058 | *081 |
| 191 | 28 103 | 126 | 149 | 171 | 194 | 217 | 240 | 262 | 285 | 307 |
| 192 | 330 | 353 | 375 | 398 | 421 | 443 | 466 | 488 | 511 | 533 |
| 193 | 556 | 578 | 601 | 623 | 646 | 668 | 691 | 713 | 735 | 758 |
| 194 | 780 | 803 | 825 | 847 | 870 | 892 | 914 | 937 | 959 | 981 |
| 195 | 29 003 | 026 | 048 | 070 | 092 | 115 | 137 | 159 | 181 | 203 |
| 196 | 226 | 248 | 270 | 292 | 314 | 336 | 358 | 380 | 403 | 425 |
| 197 | 447 | 469 | 491 | 513 | 535 | 557 | 579 | 601 | 623 | 645 |
| 198 | 667 | 688 | 710 | 732 | 754 | 776 | 798 | 820 | 842 | 863 |
| 199 | 885 | 907 | 929 | 951 | 973 | 994 | *016 | *038 | *060 | *081 |
| 200 | 30 103 | 125 | 146 | 168 | 190 | 211 | 233 | 255 | 276 | 298 |
| 201 | 320 | 341 | 363 | 384 | 406 | 428 | 449 | 471 | 492 | 514 |
| 202 | 535 | 557 | 578 | 600 | 621 | 643 | 664 | 685 | 707 | 728 |
| 203 | 750 | 771 | 792 | 814 | 835 | 856 | 878 | 899 | 920 | 942 |
| 204 | 963 | 984 | *006 | *027 | *048 | *069 | *091 | *112 | *133 | *154 |
| 205 | 31 175 | 197 | 218 | 239 | 260 | 281 | 302 | 323 | 345 | 366 |
| 206 | 387 | 408 | 429 | 450 | 471 | 492 | 513 | 534 | 555 | 576 |
| 207 | 597 | 618 | 639 | 660 | 681 | 702 | 723 | 744 | 765 | 785 |
| 208 | 806 | 827 | 848 | 869 | 890 | 911 | 931 | 952 | 973 | 994 |
| 209 | 32 015 | 035 | 056 | 077 | 098 | 118 | 139 | 160 | 181 | 201 |
| 210 | 222 | 243 | 263 | 284 | 305 | 325 | 346 | 366 | 387 | 408 |
| 211 | 428 | 449 | 469 | 490 | 510 | 531 | 552 | 572 | 593 | 613 |
| 212 | 634 | 654 | 675 | 695 | 715 | 736 | 756 | 777 | 797 | 818 |
| 213 | 838 | 858 | 879 | 899 | 919 | 940 | 960 | 980 | *001 | *021 |
| 214 | 33 041 | 062 | 082 | 102 | 122 | 143 | 163 | 183 | 203 | 224 |
| 215 | 244 | 264 | 284 | 304 | 325 | 345 | 365 | 385 | 405 | 425 |
| 216 | 445 | 465 | 486 | 506 | 526 | 546 | 566 | 586 | 606 | 626 |
| 217 | 646 | 666 | 686 | 706 | 726 | 746 | 766 | 786 | 806 | 826 |
| 218 | 846 | 866 | 885 | 905 | 925 | 945 | 965 | 985 | *005 | *025 |
| 219 | 34 044 | 064 | 084 | 104 | 124 | 143 | 163 | 183 | 203 | 223 |
| 220 | 242 | 262 | 282 | 301 | 321 | 341 | 361 | 380 | 400 | 420 |
| 221 | 439 | 459 | 479 | 498 | 518 | 537 | 557 | 577 | 596 | 616 |
| 222 | 635 | 655 | 674 | 694 | 713 | 733 | 753 | 772 | 792 | 811 |
| 223 | 830 | 850 | 869 | 889 | 908 | 928 | 947 | 967 | 986 | *005 |
| 224 | 35 025 | 044 | 064 | 083 | 102 | 122 | 141 | 160 | 180 | 199 |
| 225 | 218 | 238 | 257 | 276 | 295 | 315 | 334 | 353 | 372 | 392 |
| 226 | 411 | 430 | 449 | 468 | 488 | 507 | 526 | 545 | 564 | 583 |
| 227 | 603 | 622 | 641 | 660 | 679 | 698 | 717 | 736 | 755 | 774 |
| 228 | 793 | 813 | 832 | 851 | 870 | 889 | 908 | 927 | 946 | 965 |
| 229 | 984 | *003 | *021 | *040 | *059 | *078 | *097 | *116 | *135 | *154 |
| 230 | 36 173 | 192 | 211 | 229 | 248 | 267 | 286 | 305 | 324 | 342 |
| 231 | 361 | 380 | 399 | 418 | 436 | 455 | 474 | 493 | 511 | 530 |
| 232 | 549 | 568 | 586 | 605 | 624 | 642 | 661 | 680 | 698 | 717 |
| 233 | 736 | 754 | 773 | 791 | 810 | 829 | 847 | 866 | 884 | 903 |
| 234 | 922 | 940 | 959 | 977 | 996 | *014 | *033 | *051 | *070 | *088 |

| Z. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 235 | 37 107 | 125 | 144 | 162 | 181 | 199 | 218 | 236 | 254 | 273 |
| 236 | 291 | 310 | 328 | 346 | 365 | 383 | 401 | 420 | 438 | 457 |
| 237 | 475 | 493 | 511 | 530 | 548 | 566 | 585 | 603 | 621 | 639 |
| 238 | 658 | 676 | 694 | 712 | 731 | 749 | 767 | 785 | 803 | 822 |
| 239 | 840 | 858 | 876 | 894 | 912 | 931 | 949 | 967 | 985 | *003 |
| 240 | 38 021 | 039 | 057 | 075 | 093 | 112 | 130 | 148 | 166 | 184 |
| 241 | 202 | 220 | 238 | 256 | 274 | 292 | 310 | 328 | 346 | 364 |
| 242 | 382 | 399 | 417 | 435 | 453 | 471 | 489 | 507 | 525 | 543 |
| 243 | 561 | 578 | 596 | 614 | 632 | 650 | 668 | 686 | 703 | 721 |
| 244 | 739 | 757 | 775 | 792 | 810 | 828 | 846 | 863 | 881 | 899 |
| 245 | 917 | 934 | 952 | 970 | 987 | *005 | *023 | *041 | *058 | *076 |
| 246 | 39 094 | 111 | 129 | 146 | 164 | 182 | 199 | 217 | 235 | 252 |
| 247 | 270 | 287 | 305 | 322 | 340 | 358 | 375 | 393 | 410 | 428 |
| 248 | 445 | 463 | 480 | 498 | 515 | 533 | 550 | 568 | 585 | 602 |
| 249 | 620 | 637 | 655 | 672 | 690 | 707 | 724 | 742 | 759 | 777 |
| 250 | 794 | 811 | 829 | 846 | 863 | 881 | 898 | 915 | 933 | 950 |
| 251 | 967 | 985 | *002 | *019 | *037 | *054 | *071 | *088 | *106 | *123 |
| 252 | 40 140 | 157 | 175 | 192 | 209 | 226 | 243 | 261 | 278 | 295 |
| 253 | 312 | 329 | 346 | 364 | 381 | 398 | 415 | 432 | 449 | 466 |
| 254 | 483 | 500 | 518 | 535 | 552 | 569 | 586 | 603 | 620 | 637 |
| 255 | 654 | 671 | 688 | 705 | 722 | 739 | 756 | 773 | 790 | 807 |
| 256 | 824 | 841 | 858 | 875 | 892 | 909 | 926 | 943 | 960 | 976 |
| 257 | 993 | *010 | *027 | *044 | *061 | *078 | *095 | *111 | *128 | *145 |
| 258 | 41 162 | 179 | 196 | 212 | 229 | 246 | 263 | 280 | 296 | 313 |
| 259 | 330 | 347 | 363 | 380 | 397 | 414 | 430 | 447 | 464 | 481 |
| 260 | 497 | 514 | 531 | 547 | 564 | 581 | 597 | 614 | 631 | 647 |
| 261 | 664 | 681 | 697 | 714 | 731 | 747 | 764 | 780 | 797 | 814 |
| 262 | 830 | 847 | 863 | 880 | 896 | 913 | 929 | 946 | 963 | 979 |
| 263 | 996 | *012 | *029 | *045 | *062 | *078 | *095 | *111 | *127 | *144 |
| 264 | 42 160 | 177 | 193 | 210 | 226 | 243 | 259 | 275 | 292 | 308 |
| 265 | 325 | 341 | 357 | 374 | 390 | 406 | 423 | 439 | 455 | 472 |
| 266 | 488 | 504 | 521 | 537 | 553 | 570 | 586 | 602 | 619 | 635 |
| 267 | 651 | 667 | 684 | 700 | 716 | 732 | 749 | 765 | 781 | 797 |
| 268 | 813 | 830 | 846 | 862 | 878 | 894 | 911 | 927 | 943 | 959 |
| 269 | 975 | 991 | *008 | *024 | *040 | *056 | *072 | *088 | *104 | *120 |
| 270 | 43 136 | 152 | 169 | 185 | 201 | 217 | 233 | 249 | 265 | 281 |
| 271 | 297 | 313 | 329 | 345 | 361 | 377 | 393 | 409 | 425 | 441 |
| 272 | 457 | 473 | 489 | 505 | 521 | 537 | 553 | 569 | 584 | 600 |
| 273 | 616 | 632 | 648 | 664 | 680 | 696 | 712 | 727 | 743 | 759 |
| 274 | 775 | 791 | 807 | 823 | 838 | 854 | 870 | 886 | 902 | 917 |
| 275 | 933 | 949 | 965 | 981 | 996 | *012 | *028 | *044 | *059 | *075 |
| 276 | 44 091 | 107 | 122 | 138 | 154 | 170 | 185 | 201 | 217 | 232 |
| 277 | 248 | 264 | 279 | 295 | 311 | 326 | 342 | 358 | 373 | 389 |
| 278 | 404 | 420 | 436 | 451 | 467 | 483 | 498 | 514 | 529 | 545 |
| 279 | 560 | 576 | 592 | 607 | 623 | 638 | 654 | 669 | 685 | 700 |

| 3. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 280 | 44 716 | 731 | 747 | 762 | 778 | 793 | 809 | 824 | 840 | 855 |
| 281 | 871 | 886 | 902 | 917 | 932 | 948 | 963 | 979 | 994 | *010 |
| 282 | 45 025 | 040 | 056 | 071 | 086 | 102 | 117 | 133 | 148 | 163 |
| 283 | 179 | 194 | 209 | 225 | 240 | 255 | 271 | 286 | 301 | 317 |
| 284 | 332 | 347 | 362 | 378 | 393 | 408 | 423 | 439 | 454 | 469 |
| 285 | 484 | 500 | 515 | 530 | 545 | 561 | 576 | 591 | 606 | 621 |
| 286 | 637 | 652 | 667 | 682 | 697 | 712 | 728 | 743 | 758 | 773 |
| 287 | 788 | 803 | 818 | 834 | 849 | 864 | 879 | 894 | 909 | 924 |
| 288 | 939 | 954 | 969 | 984 | *000 | *015 | *030 | *045 | *060 | *075 |
| 289 | 46 090 | 105 | 120 | 135 | 150 | 165 | 180 | 195 | 210 | 225 |
| 290 | 240 | 255 | 270 | 285 | 300 | 315 | 330 | 345 | 359 | 374 |
| 291 | 389 | 404 | 419 | 434 | 449 | 464 | 479 | 494 | 509 | 523 |
| 292 | 538 | 553 | 568 | 583 | 598 | 613 | 627 | 642 | 657 | 672 |
| 293 | 687 | 702 | 716 | 731 | 746 | 761 | 776 | 790 | 805 | 820 |
| 294 | 835 | 850 | 864 | 879 | 894 | 909 | 923 | 938 | 953 | 967 |
| 295 | 982 | 997 | *012 | *026 | *041 | *056 | *070 | *085 | *100 | *114 |
| 296 | 47 129 | 144 | 159 | 173 | 188 | 202 | 217 | 232 | 246 | 261 |
| 297 | 276 | 290 | 305 | 319 | 334 | 349 | 363 | 378 | 392 | 407 |
| 298 | 422 | 436 | 451 | 465 | 480 | 494 | 509 | 524 | 538 | 553 |
| 299 | 567 | 582 | 596 | 611 | 625 | 640 | 654 | 669 | 683 | 698 |
| 300 | 712 | 727 | 741 | 756 | 770 | 784 | 799 | 813 | 828 | 842 |
| 301 | 857 | 871 | 885 | 900 | 914 | 929 | 943 | 958 | 972 | 986 |
| 302 | 48 001 | 015 | 029 | 044 | 058 | 073 | 087 | 101 | 116 | 130 |
| 303 | 144 | 159 | 173 | 187 | 202 | 216 | 230 | 244 | 259 | 273 |
| 304 | 287 | 302 | 316 | 330 | 344 | 359 | 373 | 387 | 401 | 416 |
| 305 | 430 | 444 | 458 | 473 | 487 | 501 | 515 | 530 | 544 | 558 |
| 306 | 572 | 586 | 601 | 615 | 629 | 643 | 657 | 671 | 686 | 700 |
| 307 | 714 | 728 | 742 | 756 | 770 | 785 | 799 | 813 | 827 | 841 |
| 308 | 855 | 869 | 883 | 897 | 911 | 926 | 940 | 954 | 968 | 982 |
| 309 | 996 | *010 | *024 | *038 | *052 | *066 | *080 | *094 | *108 | *122 |
| 310 | 49 136 | 150 | 164 | 178 | 192 | 206 | 220 | 234 | 248 | 262 |
| 311 | 276 | 290 | 304 | 318 | 332 | 346 | 360 | 374 | 388 | 402 |
| 312 | 415 | 429 | 443 | 457 | 471 | 485 | 499 | 513 | 527 | 541 |
| 313 | 554 | 568 | 582 | 596 | 610 | 624 | 638 | 651 | 665 | 679 |
| 314 | 693 | 707 | 721 | 734 | 748 | 762 | 776 | 790 | 803 | 817 |
| 315 | 831 | 845 | 859 | 872 | 886 | 900 | 914 | 927 | 941 | 955 |
| 316 | 969 | 982 | 996 | *010 | *024 | *037 | *051 | *065 | *079 | *092 |
| 317 | 50 106 | 120 | 133 | 147 | 161 | 174 | 188 | 202 | 215 | 229 |
| 318 | 243 | 256 | 270 | 284 | 297 | 311 | 325 | 338 | 352 | 365 |
| 319 | 379 | 393 | 406 | 420 | 433 | 447 | 461 | 474 | 488 | 501 |
| 320 | 515 | 529 | 542 | 556 | 569 | 583 | 596 | 610 | 623 | 637 |
| 321 | 651 | 664 | 678 | 691 | 705 | 718 | 732 | 745 | 759 | 772 |
| 322 | 786 | 799 | 813 | 826 | 840 | 853 | 866 | 880 | 893 | 907 |
| 323 | 920 | 934 | 947 | 961 | 974 | 987 | *001 | *014 | *028 | *041 |
| 324 | 51 055 | 068 | 081 | 095 | 108 | 121 | 135 | 148 | 162 | 175 |

| 3. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 325 | 51 183 | 202 | 215 | 228 | 242 | 255 | 268 | 282 | 295 | 308 |
| 326 | 321 | 335 | 348 | 362 | 375 | 388 | 402 | 415 | 428 | 441 |
| 327 | 455 | 468 | 481 | 495 | 508 | 521 | 534 | 548 | 561 | 574 |
| 328 | 587 | 601 | 614 | 627 | 640 | 654 | 667 | 680 | 693 | 706 |
| 329 | 720 | 733 | 746 | 759 | 772 | 786 | 799 | 812 | 825 | 838 |
| 330 | 851 | 865 | 878 | 891 | 904 | 917 | 930 | 943 | 957 | 970 |
| 331 | 983 | 996 | *009 | *022 | *035 | *048 | *061 | *075 | *088 | *101 |
| 332 | 52 114 | 127 | 140 | 153 | 166 | 179 | 192 | 205 | 218 | 231 |
| 333 | 244 | 257 | 270 | 284 | 297 | 310 | 323 | 336 | 349 | 362 |
| 334 | 375 | 388 | 401 | 414 | 427 | 440 | 453 | 466 | 479 | 492 |
| 335 | 504 | 517 | 530 | 543 | 556 | 569 | 582 | 595 | 608 | 621 |
| 336 | 634 | 647 | 660 | 673 | 686 | 699 | 711 | 724 | 737 | 750 |
| 337 | 763 | 776 | 789 | 802 | 815 | 827 | 840 | 853 | 866 | 879 |
| 338 | 892 | 905 | 917 | 930 | 943 | 956 | 969 | 982 | 994 | *007 |
| 339 | 53 020 | 033 | 046 | 058 | 071 | 084 | 097 | 110 | 122 | 135 |
| 340 | 148 | 161 | 173 | 186 | 199 | 212 | 224 | 237 | 250 | 263 |
| 341 | 275 | 288 | 301 | 314 | 326 | 339 | 352 | 364 | 377 | 390 |
| 342 | 403 | 415 | 428 | 441 | 453 | 466 | 479 | 491 | 504 | 517 |
| 343 | 529 | 542 | 555 | 567 | 580 | 593 | 605 | 618 | 631 | 643 |
| 344 | 656 | 668 | 681 | 694 | 706 | 719 | 732 | 744 | 757 | 769 |
| 345 | 782 | 794 | 807 | 820 | 832 | 845 | 857 | 870 | 882 | 895 |
| 346 | 908 | 920 | 933 | 945 | 958 | 970 | 983 | 995 | *008 | *020 |
| 347 | 54 033 | 045 | 058 | 070 | 083 | 095 | 108 | 120 | 133 | 145 |
| 348 | 158 | 170 | 183 | 195 | 208 | 220 | 233 | 245 | 258 | 270 |
| 349 | 283 | 295 | 307 | 320 | 332 | 345 | 357 | 370 | 382 | 394 |
| 350 | 407 | 419 | 432 | 444 | 456 | 469 | 481 | 494 | 506 | 518 |
| 351 | 531 | 543 | 555 | 568 | 580 | 593 | 605 | 617 | 630 | 642 |
| 352 | 654 | 667 | 679 | 691 | 704 | 716 | 728 | 741 | 753 | 765 |
| 353 | 777 | 790 | 802 | 814 | 827 | 839 | 851 | 864 | 876 | 888 |
| 354 | 900 | 913 | 925 | 937 | 949 | 962 | 974 | 986 | 998 | *011 |
| 355 | 55 023 | 035 | 047 | 060 | 072 | 084 | 096 | 108 | 121 | 133 |
| 356 | 145 | 157 | 169 | 182 | 194 | 206 | 218 | 230 | 242 | 255 |
| 357 | 267 | 279 | 291 | 303 | 315 | 328 | 340 | 352 | 364 | 376 |
| 358 | 388 | 400 | 413 | 425 | 437 | 449 | 461 | 473 | 485 | 497 |
| 359 | 509 | 522 | 534 | 546 | 558 | 570 | 582 | 594 | 606 | 618 |
| 360 | 630 | 642 | 654 | 666 | 678 | 691 | 703 | 715 | 727 | 739 |
| 361 | 751 | 763 | 775 | 787 | 799 | 811 | 823 | 835 | 847 | 859 |
| 362 | 871 | 883 | 895 | 907 | 919 | 931 | 943 | 955 | 967 | 979 |
| 363 | 991 | *003 | *015 | *027 | *038 | *050 | *062 | *074 | *086 | *098 |
| 364 | 56 110 | 122 | 134 | 146 | 158 | 170 | 182 | 194 | 205 | 217 |
| 365 | 229 | 241 | 253 | 265 | 277 | 289 | 301 | 312 | 324 | 336 |
| 366 | 348 | 360 | 372 | 384 | 396 | 407 | 419 | 431 | 443 | 455 |
| 367 | 467 | 478 | 490 | 502 | 514 | 526 | 538 | 549 | 561 | 573 |
| 368 | 585 | 597 | 608 | 620 | 632 | 644 | 656 | 667 | 679 | 691 |
| 369 | 703 | 714 | 726 | 738 | 750 | 761 | 773 | 785 | 797 | 808 |

| 3. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 370 | 56 820 | 832 | 844 | 855 | 867 | 879 | 891 | 902 | 914 | 926 |
| 371 | 937 | 949 | 961 | 972 | 984 | 996 | *008 | *019 | *031 | *043 |
| 372 | 57 054 | 066 | 078 | 089 | 101 | 113 | 124 | 136 | 148 | 159 |
| 373 | 171 | 183 | 194 | 206 | 217 | 229 | 241 | 252 | 264 | 276 |
| 374 | 287 | 299 | 310 | 322 | 334 | 345 | 357 | 368 | 380 | 392 |
| 375 | 403 | 415 | 426 | 438 | 449 | 461 | 473 | 484 | 496 | 507 |
| 376 | 519 | 530 | 542 | 553 | 565 | 576 | 588 | 600 | 611 | 623 |
| 377 | 634 | 646 | 657 | 669 | 680 | 692 | 703 | 715 | 726 | 738 |
| 378 | 749 | 761 | 772 | 784 | 795 | 807 | 818 | 830 | 841 | 852 |
| 379 | 864 | 875 | 887 | 898 | 910 | 921 | 933 | 944 | 955 | 967 |
| 380 | 978 | 990 | *001 | *013 | *024 | *035 | *047 | *058 | *070 | *081 |
| 381 | 58 092 | 104 | 115 | 127 | 138 | 149 | 161 | 172 | 184 | 195 |
| 382 | 206 | 218 | 229 | 240 | 252 | 263 | 274 | 286 | 297 | 309 |
| 383 | 320 | 331 | 343 | 354 | 365 | 377 | 388 | 399 | 410 | 422 |
| 384 | 433 | 444 | 456 | 467 | 478 | 490 | 501 | 512 | 524 | 535 |
| 385 | 546 | 557 | 569 | 580 | 591 | 602 | 614 | 625 | 636 | 647 |
| 386 | 659 | 670 | 681 | 692 | 704 | 715 | 726 | 737 | 749 | 760 |
| 387 | 771 | 782 | 794 | 805 | 816 | 827 | 838 | 850 | 861 | 872 |
| 388 | 883 | 894 | 906 | 917 | 928 | 939 | 950 | 961 | 973 | 984 |
| 389 | 995 | *006 | *017 | *028 | *040 | *051 | *062 | *073 | *084 | *095 |
| 390 | 59 106 | 118 | 129 | 140 | 151 | 162 | 173 | 184 | 195 | 207 |
| 391 | 218 | 229 | 240 | 251 | 262 | 273 | 284 | 295 | 306 | 318 |
| 392 | 329 | 340 | 351 | 362 | 373 | 384 | 395 | 406 | 417 | 428 |
| 393 | 439 | 450 | 461 | 472 | 483 | 494 | 506 | 517 | 528 | 539 |
| 394 | 550 | 561 | 572 | 583 | 594 | 605 | 616 | 627 | 638 | 649 |
| 395 | 660 | 671 | 682 | 693 | 704 | 715 | 726 | 737 | 748 | 759 |
| 396 | 770 | 780 | 791 | 802 | 813 | 824 | 835 | 846 | 857 | 868 |
| 397 | 879 | 890 | 901 | 912 | 923 | 934 | 945 | 956 | 966 | 977 |
| 398 | 988 | 999 | *010 | *021 | *032 | *043 | *054 | *065 | *076 | *086 |
| 399 | 60 097 | 108 | 119 | 130 | 141 | 152 | 163 | 173 | 184 | 195 |
| 400 | 206 | 217 | 228 | 239 | 249 | 260 | 271 | 282 | 293 | 304 |
| 401 | 314 | 325 | 336 | 347 | 358 | 369 | 379 | 390 | 401 | 412 |
| 402 | 423 | 433 | 444 | 455 | 466 | 477 | 487 | 498 | 509 | 520 |
| 403 | 531 | 541 | 552 | 563 | 574 | 584 | 595 | 606 | 617 | 627 |
| 404 | 638 | 649 | 660 | 670 | 681 | 692 | 703 | 713 | 724 | 735 |
| 405 | 746 | 756 | 767 | 778 | 788 | 799 | 810 | 821 | 831 | 842 |
| 406 | 853 | 863 | 874 | 885 | 895 | 906 | 917 | 927 | 938 | 949 |
| 407 | 959 | 970 | 981 | 991 | *002 | *013 | *023 | *034 | *045 | *055 |
| 408 | 61 066 | 077 | 087 | 098 | 109 | 119 | 130 | 140 | 151 | 162 |
| 409 | 172 | 183 | 194 | 204 | 215 | 225 | 236 | 247 | 257 | 268 |
| 410 | 278 | 289 | 300 | 310 | 321 | 331 | 342 | 352 | 363 | 374 |
| 411 | 384 | 395 | 405 | 416 | 426 | 437 | 448 | 458 | 469 | 479 |
| 412 | 490 | 500 | 511 | 521 | 532 | 542 | 553 | 563 | 574 | 584 |
| 413 | 595 | 606 | 616 | 627 | 637 | 648 | 658 | 669 | 679 | 690 |
| 414 | 700 | 711 | 721 | 731 | 742 | 752 | 763 | 773 | 784 | 794 |

| 3. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 415 | 61 805 | 815 | 826 | 836 | 847 | 857 | 868 | 878 | 888 | 899 |
| 416 | 909 | 920 | 930 | 941 | 951 | 962 | 972 | 982 | 993 | *003 |
| 417 | 62 014 | 024 | 034 | 045 | 055 | 066 | 076 | 086 | 097 | 107 |
| 418 | 118 | 128 | 138 | 149 | 159 | 170 | 180 | 190 | 201 | 211 |
| 419 | 221 | 232 | 242 | 252 | 263 | 273 | 284 | 294 | 304 | 315 |
| 420 | 325 | 335 | 346 | 356 | 366 | 377 | 387 | 397 | 408 | 418 |
| 421 | 428 | 439 | 449 | 459 | 469 | 480 | 490 | 500 | 511 | 521 |
| 422 | 531 | 542 | 552 | 562 | 572 | 583 | 593 | 603 | 613 | 624 |
| 423 | 634 | 644 | 655 | 665 | 675 | 685 | 696 | 706 | 716 | 726 |
| 424 | 737 | 747 | 757 | 767 | 778 | 788 | 798 | 808 | 818 | 829 |
| 425 | 839 | 849 | 859 | 870 | 880 | 890 | 900 | 910 | 921 | 931 |
| 426 | 941 | 951 | 961 | 972 | 982 | 992 | *002 | *012 | *022 | *033 |
| 427 | 63 043 | 053 | 063 | 073 | 083 | 094 | 104 | 114 | 124 | 134 |
| 428 | 144 | 155 | 165 | 175 | 185 | 195 | 205 | 215 | 225 | 236 |
| 429 | 246 | 256 | 266 | 276 | 286 | 296 | 306 | 317 | 327 | 337 |
| 430 | 347 | 357 | 367 | 377 | 387 | 397 | 407 | 417 | 428 | 438 |
| 431 | 448 | 458 | 468 | 478 | 488 | 498 | 508 | 518 | 528 | 538 |
| 432 | 548 | 558 | 568 | 579 | 589 | 599 | 609 | 619 | 629 | 639 |
| 433 | 649 | 659 | 669 | 679 | 689 | 699 | 709 | 719 | 729 | 739 |
| 434 | 749 | 759 | 769 | 779 | 789 | 799 | 809 | 819 | 829 | 839 |
| 435 | 849 | 859 | 869 | 879 | 889 | 899 | 909 | 919 | 929 | 939 |
| 436 | 949 | 959 | 969 | 979 | 988 | 998 | *008 | *018 | *028 | *038 |
| 437 | 64 048 | 058 | 068 | 078 | 088 | 098 | 108 | 118 | 128 | 137 |
| 438 | 147 | 157 | 167 | 177 | 187 | 197 | 207 | 217 | 227 | 237 |
| 439 | 246 | 256 | 266 | 276 | 286 | 296 | 306 | 316 | 326 | 335 |
| 440 | 345 | 355 | 365 | 375 | 385 | 395 | 404 | 414 | 424 | 434 |
| 441 | 444 | 454 | 464 | 473 | 483 | 493 | 503 | 513 | 523 | 532 |
| 442 | 542 | 552 | 562 | 572 | 582 | 591 | 601 | 611 | 621 | 631 |
| 443 | 640 | 650 | 660 | 670 | 680 | 689 | 699 | 709 | 719 | 729 |
| 444 | 738 | 748 | 758 | 768 | 777 | 787 | 797 | 807 | 816 | 826 |
| 445 | 836 | 846 | 856 | 865 | 875 | 885 | 895 | 904 | 914 | 924 |
| 446 | 933 | 943 | 953 | 963 | 972 | 982 | 992 | *002 | *011 | *021 |
| 447 | 65 031 | 040 | 050 | 060 | 070 | 079 | 089 | 099 | 108 | 118 |
| 448 | 128 | 137 | 147 | 157 | 167 | 176 | 186 | 196 | 205 | 215 |
| 449 | 225 | 234 | 244 | 254 | 263 | 273 | 283 | 292 | 302 | 312 |
| 450 | 321 | 331 | 341 | 350 | 360 | 369 | 379 | 389 | 398 | 408 |
| 451 | 418 | 427 | 437 | 447 | 456 | 466 | 475 | 485 | 495 | 504 |
| 452 | 514 | 523 | 533 | 543 | 552 | 562 | 571 | 581 | 591 | 600 |
| 453 | 610 | 619 | 629 | 639 | 648 | 658 | 667 | 677 | 686 | 696 |
| 454 | 706 | 715 | 725 | 734 | 744 | 753 | 763 | 772 | 782 | 792 |
| 455 | 801 | 811 | 820 | 830 | 839 | 849 | 858 | 868 | 877 | 887 |
| 456 | 896 | 906 | 916 | 925 | 935 | 944 | 954 | 963 | 973 | 982 |
| 457 | 992 | *001 | *011 | *020 | *030 | *039 | *049 | *058 | *068 | *077 |
| 458 | 66 087 | 096 | 106 | 115 | 124 | 134 | 143 | 153 | 162 | 172 |
| 459 | 181 | 191 | 200 | 210 | 219 | 229 | 238 | 247 | 257 | 266 |

| Z. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 460 | 66 276 | 285 | 295 | 304 | 314 | 323 | 332 | 342 | 351 | 361 |
| 461 | 370 | 380 | 389 | 398 | 408 | 417 | 427 | 436 | 445 | 455 |
| 462 | 464 | 474 | 483 | 492 | 502 | 511 | 521 | 530 | 539 | 549 |
| 463 | 558 | 567 | 577 | 586 | 596 | 605 | 614 | 624 | 633 | 642 |
| 464 | 652 | 661 | 671 | 680 | 689 | 699 | 708 | 717 | 727 | 736 |
| 465 | 745 | 755 | 764 | 773 | 783 | 792 | 801 | 811 | 820 | 829 |
| 466 | 839 | 848 | 857 | 867 | 876 | 885 | 894 | 904 | 913 | 922 |
| 467 | 932 | 941 | 950 | 960 | 969 | 978 | 987 | 997 | *006 | *015 |
| 468 | 67 025 | 034 | 043 | 052 | 062 | 071 | 080 | 089 | 099 | 108 |
| 469 | 117 | 127 | 136 | 145 | 154 | 164 | 173 | 182 | 191 | 201 |
| 470 | 210 | 219 | 228 | 237 | 247 | 256 | 265 | 274 | 284 | 293 |
| 471 | 302 | 311 | 321 | 330 | 339 | 348 | 357 | 367 | 376 | 385 |
| 472 | 394 | 403 | 413 | 422 | 431 | 440 | 449 | 459 | 468 | 477 |
| 473 | 486 | 495 | 504 | 514 | 523 | 532 | 541 | 550 | 560 | 569 |
| 474 | 578 | 587 | 596 | 605 | 614 | 624 | 633 | 642 | 651 | 660 |
| 475 | 669 | 679 | 688 | 697 | 706 | 715 | 724 | 733 | 742 | 752 |
| 476 | 761 | 770 | 779 | 788 | 797 | 806 | 815 | 825 | 834 | 843 |
| 477 | 852 | 861 | 870 | 879 | 888 | 897 | 906 | 916 | 925 | 934 |
| 478 | 943 | 952 | 961 | 970 | 979 | 988 | 997 | *006 | *015 | *024 |
| 479 | 68 034 | 043 | 052 | 061 | 070 | 079 | 088 | 097 | 106 | 115 |
| 480 | 124 | 133 | 142 | 151 | 160 | 169 | 178 | 187 | 196 | 205 |
| 481 | 215 | 224 | 233 | 242 | 251 | 260 | 269 | 278 | 287 | 296 |
| 482 | 305 | 314 | 323 | 332 | 341 | 350 | 359 | 368 | 377 | 386 |
| 483 | 395 | 404 | 413 | 422 | 431 | 440 | 449 | 458 | 467 | 476 |
| 484 | 485 | 494 | 502 | 511 | 520 | 529 | 538 | 547 | 556 | 565 |
| 485 | 574 | 583 | 592 | 601 | 610 | 619 | 628 | 637 | 646 | 655 |
| 486 | 664 | 673 | 681 | 690 | 699 | 708 | 717 | 726 | 735 | 744 |
| 487 | 753 | 762 | 771 | 780 | 789 | 797 | 806 | 815 | 824 | 833 |
| 488 | 842 | 851 | 860 | 869 | 878 | 886 | 895 | 904 | 913 | 922 |
| 489 | 931 | 940 | 949 | 958 | 966 | 975 | 984 | 993 | *002 | *011 |
| 490 | 69 020 | 028 | 037 | 046 | 055 | 064 | 073 | 082 | 090 | 099 |
| 491 | 108 | 117 | 126 | 135 | 144 | 152 | 161 | 170 | 179 | 188 |
| 492 | 197 | 205 | 214 | 223 | 232 | 241 | 249 | 258 | 267 | 276 |
| 493 | 285 | 294 | 302 | 311 | 320 | 329 | 338 | 346 | 355 | 364 |
| 494 | 373 | 381 | 390 | 399 | 408 | 417 | 425 | 434 | 443 | 452 |
| 495 | 461 | 469 | 478 | 487 | 496 | 504 | 513 | 522 | 531 | 539 |
| 496 | 548 | 557 | 566 | 574 | 583 | 592 | 601 | 609 | 618 | 627 |
| 497 | 636 | 644 | 653 | 662 | 671 | 679 | 688 | 697 | 705 | 714 |
| 498 | 723 | 732 | 740 | 749 | 758 | 767 | 775 | 784 | 793 | 801 |
| 499 | 810 | 819 | 827 | 836 | 845 | 854 | 862 | 871 | 880 | 888 |
| 500 | 897 | 906 | 914 | 923 | 932 | 940 | 949 | 958 | 966 | 975 |
| 501 | 984 | 992 | *001 | *010 | *018 | *027 | *036 | *044 | *053 | *062 |
| 502 | 70 070 | 079 | 088 | 096 | 105 | 114 | 122 | 131 | 140 | 148 |
| 503 | 157 | 165 | 174 | 183 | 191 | 200 | 209 | 217 | 226 | 234 |
| 504 | 243 | 252 | 260 | 269 | 278 | 286 | 295 | 303 | 312 | 321 |

| Z. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 505 | 70 329 | 338 | 346 | 355 | 364 | 372 | 381 | 389 | 398 | 406 |
| 506 | 415 | 424 | 432 | 441 | 449 | 458 | 467 | 475 | 484 | 492 |
| 507 | 501 | 509 | 518 | 526 | 535 | 544 | 552 | 561 | 569 | 578 |
| 508 | 586 | 595 | 603 | 612 | 621 | 629 | 638 | 646 | 655 | 663 |
| 509 | 672 | 680 | 689 | 697 | 706 | 714 | 723 | 731 | 740 | 749 |
| 510 | 757 | 766 | 774 | 783 | 791 | 800 | 808 | 817 | 825 | 834 |
| 511 | 842 | 851 | 859 | 868 | 876 | 885 | 893 | 902 | 910 | 919 |
| 512 | 927 | 935 | 944 | 952 | 961 | 969 | 978 | 986 | 995 | *003 |
| 513 | 71 012 | 020 | 029 | 037 | 046 | 054 | 063 | 071 | 079 | 088 |
| 514 | 096 | 105 | 113 | 122 | 130 | 139 | 147 | 155 | 164 | 172 |
| 515 | 181 | 189 | 198 | 206 | 214 | 223 | 231 | 240 | 248 | 257 |
| 516 | 265 | 273 | 282 | 290 | 299 | 307 | 315 | 324 | 332 | 341 |
| 517 | 349 | 357 | 366 | 374 | 383 | 391 | 399 | 408 | 416 | 425 |
| 518 | 433 | 441 | 450 | 458 | 466 | 475 | 483 | 492 | 500 | 508 |
| 519 | 517 | 525 | 533 | 542 | 550 | 559 | 567 | 575 | 584 | 592 |
| 520 | 600 | 609 | 617 | 625 | 634 | 642 | 650 | 659 | 667 | 675 |
| 521 | 684 | 692 | 700 | 709 | 717 | 725 | 734 | 742 | 750 | 759 |
| 522 | 767 | 775 | 784 | 792 | 800 | 809 | 817 | 825 | 834 | 842 |
| 523 | 850 | 858 | 867 | 875 | 883 | 892 | 900 | 908 | 917 | 925 |
| 524 | 933 | 941 | 950 | 958 | 966 | 975 | 983 | 991 | 999 | *008 |
| 525 | 72 016 | 024 | 032 | 041 | 049 | 057 | 066 | 074 | 082 | 090 |
| 526 | 099 | 107 | 115 | 123 | 132 | 140 | 148 | 156 | 165 | 173 |
| 527 | 181 | 189 | 198 | 206 | 214 | 222 | 230 | 239 | 247 | 255 |
| 528 | 263 | 272 | 280 | 288 | 296 | 304 | 313 | 321 | 329 | 337 |
| 529 | 346 | 354 | 362 | 370 | 378 | 387 | 395 | 403 | 411 | 419 |
| 530 | 428 | 436 | 444 | 452 | 460 | 469 | 477 | 485 | 493 | 501 |
| 531 | 509 | 518 | 526 | 534 | 542 | 550 | 558 | 567 | 575 | 583 |
| 532 | 591 | 599 | 607 | 616 | 624 | 632 | 640 | 648 | 656 | 665 |
| 533 | 673 | 681 | 689 | 697 | 705 | 713 | 722 | 730 | 738 | 746 |
| 534 | 754 | 762 | 770 | 779 | 787 | 795 | 803 | 811 | 819 | 827 |
| 535 | 835 | 843 | 852 | 860 | 868 | 876 | 884 | 892 | 900 | 908 |
| 536 | 916 | 925 | 933 | 941 | 949 | 957 | 965 | 973 | 981 | 989 |
| 537 | 997 | *006 | *014 | *022 | *030 | *038 | *046 | *054 | *062 | *070 |
| 538 | 73 078 | 086 | 094 | 102 | 111 | 119 | 127 | 135 | 143 | 151 |
| 539 | 159 | 167 | 175 | 183 | 191 | 199 | 207 | 215 | 223 | 231 |
| 540 | 239 | 247 | 255 | 263 | 272 | 280 | 288 | 296 | 304 | 312 |
| 541 | 320 | 328 | 336 | 344 | 352 | 360 | 368 | 376 | 384 | 392 |
| 542 | 400 | 408 | 416 | 424 | 432 | 440 | 448 | 456 | 464 | 472 |
| 543 | 480 | 488 | 496 | 504 | 512 | 520 | 528 | 536 | 544 | 552 |
| 544 | 560 | 568 | 576 | 584 | 592 | 600 | 608 | 616 | 624 | 632 |
| 545 | 640 | 648 | 656 | 664 | 672 | 679 | 687 | 695 | 703 | 711 |
| 546 | 719 | 727 | 735 | 743 | 751 | 759 | 767 | 775 | 783 | 791 |
| 547 | 799 | 807 | 815 | 823 | 830 | 838 | 846 | 854 | 862 | 870 |
| 548 | 878 | 886 | 894 | 902 | 910 | 918 | 926 | 933 | 941 | 949 |
| 549 | 957 | 965 | 973 | 981 | 989 | 997 | *005 | *013 | *020 | *028 |

| Z. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 550 | 74 036 | 044 | 052 | 060 | 068 | 076 | 084 | 092 | 099 | 107 |
| 551 | 115 | 123 | 131 | 139 | 147 | 155 | 162 | 170 | 178 | 186 |
| 552 | 194 | 202 | 210 | 218 | 225 | 233 | 241 | 249 | 257 | 265 |
| 553 | 273 | 280 | 288 | 296 | 304 | 312 | 320 | 327 | 335 | 343 |
| 554 | 351 | 359 | 367 | 374 | 382 | 390 | 398 | 406 | 414 | 421 |
| 555 | 429 | 437 | 445 | 453 | 461 | 468 | 476 | 484 | 492 | 500 |
| 556 | 507 | 515 | 523 | 531 | 539 | 547 | 554 | 562 | 570 | 578 |
| 557 | 586 | 593 | 601 | 609 | 617 | 624 | 632 | 640 | 648 | 656 |
| 558 | 663 | 671 | 679 | 687 | 695 | 702 | 710 | 718 | 726 | 733 |
| 559 | 741 | 749 | 757 | 764 | 772 | 780 | 788 | 796 | 803 | 811 |
| 560 | 819 | 827 | 834 | 842 | 850 | 858 | 865 | 873 | 881 | 889 |
| 561 | 896 | 904 | 912 | 920 | 927 | 935 | 943 | 950 | 958 | 966 |
| 562 | 974 | 981 | 989 | 997 | *005 | *012 | *020 | *028 | *035 | *043 |
| 563 | 75 051 | 059 | 066 | 074 | 082 | 089 | 097 | 105 | 113 | 120 |
| 564 | 128 | 136 | 143 | 151 | 159 | 166 | 174 | 182 | 189 | 197 |
| 565 | 205 | 213 | 220 | 228 | 236 | 243 | 251 | 259 | 266 | 274 |
| 566 | 282 | 289 | 297 | 305 | 312 | 320 | 328 | 335 | 343 | 351 |
| 567 | 358 | 366 | 374 | 381 | 389 | 397 | 404 | 412 | 420 | 427 |
| 568 | 435 | 442 | 450 | 458 | 465 | 473 | 481 | 488 | 496 | 504 |
| 569 | 511 | 519 | 526 | 534 | 542 | 549 | 557 | 565 | 572 | 580 |
| 570 | 587 | 595 | 603 | 610 | 618 | 626 | 633 | 641 | 648 | 656 |
| 571 | 664 | 671 | 679 | 686 | 694 | 702 | 709 | 717 | 724 | 732 |
| 572 | 740 | 747 | 755 | 762 | 770 | 778 | 785 | 793 | 800 | 808 |
| 573 | 815 | 823 | 831 | 838 | 846 | 853 | 861 | 868 | 876 | 884 |
| 574 | 891 | 899 | 906 | 914 | 921 | 929 | 937 | 944 | 952 | 959 |
| 575 | 967 | 974 | 982 | 989 | 997 | *005 | *012 | *020 | *027 | *035 |
| 576 | 76 042 | 050 | 057 | 065 | 072 | 080 | 087 | 095 | 103 | 110 |
| 577 | 118 | 125 | 133 | 140 | 148 | 155 | 163 | 170 | 178 | 185 |
| 578 | 193 | 200 | 208 | 215 | 223 | 230 | 238 | 245 | 253 | 260 |
| 579 | 268 | 275 | 283 | 290 | 298 | 305 | 313 | 320 | 328 | 335 |
| 580 | 343 | 350 | 358 | 365 | 373 | 380 | 388 | 395 | 403 | 410 |
| 581 | 418 | 425 | 433 | 440 | 448 | 455 | 462 | 470 | 477 | 485 |
| 582 | 492 | 500 | 507 | 515 | 522 | 530 | 537 | 545 | 552 | 559 |
| 583 | 567 | 574 | 582 | 589 | 597 | 604 | 612 | 619 | 626 | 634 |
| 584 | 641 | 649 | 656 | 664 | 671 | 678 | 686 | 693 | 701 | 708 |
| 585 | 716 | 723 | 730 | 738 | 745 | 753 | 760 | 768 | 775 | 782 |
| 586 | 790 | 797 | 805 | 812 | 819 | 827 | 834 | 842 | 849 | 856 |
| 587 | 864 | 871 | 879 | 886 | 893 | 901 | 908 | 916 | 923 | 930 |
| 588 | 938 | 945 | 953 | 960 | 967 | 975 | 982 | 989 | 997 | *004 |
| 589 | 77 012 | 019 | 026 | 034 | 041 | 048 | 056 | 063 | 070 | 078 |
| 590 | 085 | 093 | 100 | 107 | 115 | 122 | 129 | 137 | 144 | 151 |
| 591 | 159 | 166 | 173 | 181 | 188 | 195 | 203 | 210 | 217 | 225 |
| 592 | 232 | 240 | 247 | 254 | 262 | 269 | 276 | 283 | 291 | 298 |
| 593 | 305 | 313 | 320 | 327 | 335 | 342 | 349 | 357 | 364 | 371 |
| 594 | 379 | 386 | 393 | 401 | 408 | 415 | 422 | 430 | 437 | 444 |

| Z. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 595 | 77 452 | 459 | 466 | 474 | 481 | 488 | 495 | 503 | 510 | 517 |
| 596 | 525 | 532 | 539 | 546 | 554 | 561 | 568 | 576 | 583 | 590 |
| 597 | 597 | 605 | 612 | 619 | 627 | 634 | 641 | 648 | 656 | 663 |
| 598 | 670 | 677 | 685 | 692 | 699 | 706 | 714 | 721 | 728 | 735 |
| 599 | 743 | 750 | 757 | 764 | 772 | 779 | 786 | 793 | 801 | 808 |
| 600 | 815 | 822 | 830 | 837 | 844 | 851 | 859 | 866 | 873 | 880 |
| 601 | 887 | 895 | 902 | 909 | 916 | 924 | 931 | 938 | 945 | 952 |
| 602 | 960 | 967 | 974 | 981 | 988 | 996 | *003 | *010 | *017 | *025 |
| 603 | 78 032 | 039 | 046 | 053 | 061 | 068 | 075 | 082 | 089 | 097 |
| 604 | 104 | 111 | 118 | 125 | 132 | 140 | 147 | 154 | 161 | 168 |
| 605 | 176 | 183 | 190 | 197 | 204 | 211 | 219 | 226 | 233 | 240 |
| 606 | 247 | 254 | 262 | 269 | 276 | 283 | 290 | 297 | 305 | 312 |
| 607 | 319 | 326 | 333 | 340 | 347 | 355 | 362 | 369 | 376 | 3[illegible]3 |
| 608 | 390 | 398 | 405 | 412 | 419 | 426 | 433 | 440 | 447 | 455 |
| 609 | 462 | 469 | 476 | 483 | 490 | 497 | 504 | 512 | 519 | 526 |
| 610 | 533 | 540 | 547 | 554 | 561 | 569 | 576 | 583 | 590 | 597 |
| 611 | 604 | 611 | 618 | 625 | 633 | 640 | 647 | 654 | 661 | 668 |
| 612 | 675 | 682 | 689 | 696 | 704 | 711 | 718 | 725 | 732 | 739 |
| 613 | 746 | 753 | 760 | 767 | 774 | 781 | 789 | 796 | 803 | 810 |
| 614 | 817 | 824 | 831 | 838 | 845 | 852 | 859 | 866 | 873 | 880 |
| 615 | 888 | 895 | 902 | 909 | 916 | 923 | 930 | 937 | 944 | 951 |
| 616 | 958 | 965 | 972 | 979 | 986 | 993 | *000 | *007 | *014 | *021 |
| 617 | 79 029 | 036 | 043 | 050 | 057 | 064 | 071 | 078 | 085 | 092 |
| 618 | 099 | 106 | 113 | 120 | 127 | 134 | 141 | 148 | 155 | 162 |
| 619 | 169 | 176 | 183 | 190 | 197 | 204 | 211 | 218 | 225 | 232 |
| 620 | 239 | 246 | 253 | 260 | 267 | 274 | 281 | 288 | 295 | 302 |
| 621 | 309 | 316 | 323 | 330 | 337 | 344 | 351 | 358 | 365 | 372 |
| 622 | 379 | 386 | 393 | 400 | 407 | 414 | 421 | 428 | 435 | 442 |
| 623 | 449 | 456 | 463 | 470 | 477 | 484 | 491 | 498 | 505 | 511 |
| 624 | 518 | 525 | 532 | 539 | 546 | 553 | 560 | 567 | 574 | 581 |
| 625 | 588 | 595 | 602 | 609 | 616 | 623 | 630 | 637 | 644 | 650 |
| 626 | 657 | 664 | 671 | 678 | 685 | 692 | 699 | 706 | 713 | 720 |
| 627 | 727 | 734 | 741 | 748 | 754 | 761 | 768 | 775 | 782 | 789 |
| 628 | 796 | 803 | 810 | 817 | 824 | 831 | 837 | 844 | 851 | 858 |
| 629 | 865 | 872 | 879 | 886 | 893 | 900 | 906 | 913 | 920 | 927 |
| 630 | 934 | 941 | 948 | 955 | 962 | 969 | 975 | 982 | 989 | 996 |
| 631 | 80 003 | 010 | 017 | 024 | 030 | 037 | 044 | 051 | 058 | 065 |
| 632 | 072 | 079 | 085 | 092 | 099 | 106 | 113 | 120 | 127 | 134 |
| 633 | 140 | 147 | 154 | 161 | 168 | 175 | 182 | 188 | 195 | 202 |
| 634 | 209 | 216 | 223 | 229 | 236 | 243 | 250 | 257 | 264 | 271 |
| 635 | 277 | 284 | 291 | 298 | 305 | 312 | 318 | 325 | 332 | 339 |
| 636 | 346 | 353 | 359 | 366 | 373 | 380 | 387 | 393 | 400 | 407 |
| 637 | 414 | 421 | 428 | 434 | 441 | 448 | 455 | 462 | 468 | 475 |
| 638 | 482 | 489 | 496 | 502 | 509 | 516 | 523 | 530 | 536 | 543 |
| 639 | 550 | 557 | 564 | 570 | 577 | 584 | 591 | 598 | 604 | 611 |

| З. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 640 | 80 618 | 625 | 632 | 638 | 645 | 652 | 659 | 665 | 672 | 679 |
| 641 | 686 | 693 | 699 | 706 | 713 | 720 | 726 | 733 | 740 | 747 |
| 642 | 754 | 760 | 767 | 774 | 781 | 787 | 794 | 801 | 808 | 814 |
| 643 | 821 | 828 | 835 | 841 | 848 | 855 | 862 | 868 | 875 | 882 |
| 644 | 889 | 895 | 902 | 909 | 916 | 922 | 929 | 936 | 943 | 949 |
| 645 | 956 | 963 | 969 | 976 | 983 | 990 | 996 | *003 | *010 | *017 |
| 646 | 81 023 | 030 | 037 | 043 | 050 | 057 | 064 | 070 | 077 | 084 |
| 647 | 090 | 097 | 104 | 111 | 117 | 124 | 131 | 137 | 144 | 151 |
| 648 | 158 | 164 | 171 | 178 | 184 | 191 | 198 | 204 | 211 | 218 |
| 649 | 224 | 231 | 238 | 245 | 251 | 258 | 265 | 271 | 278 | 285 |
| 650 | 291 | 298 | 305 | 311 | 318 | 325 | 331 | 338 | 345 | 351 |
| 651 | 358 | 365 | 371 | 378 | 385 | 391 | 398 | 405 | 411 | 418 |
| 652 | 425 | 431 | 438 | 445 | 451 | 458 | 465 | 471 | 478 | 485 |
| 653 | 491 | 498 | 505 | 511 | 518 | 525 | 531 | 538 | 544 | 551 |
| 654 | 558 | 564 | 571 | 578 | 584 | 591 | 598 | 604 | 611 | 617 |
| 655 | 624 | 631 | 637 | 644 | 651 | 657 | 664 | 671 | 677 | 684 |
| 656 | 690 | 697 | 704 | 710 | 717 | 723 | 730 | 737 | 743 | 750 |
| 657 | 757 | 763 | 770 | 776 | 783 | 790 | 796 | 803 | 809 | 816 |
| 658 | 823 | 829 | 836 | 842 | 849 | 856 | 862 | 869 | 875 | 882 |
| 659 | 889 | 895 | 902 | 908 | 915 | 921 | 928 | 935 | 941 | 948 |
| 660 | 954 | 961 | 968 | 974 | 981 | 987 | 994 | *000 | *007 | *014 |
| 661 | 82 020 | 027 | 033 | 040 | 046 | 053 | 060 | 066 | 073 | 079 |
| 662 | 086 | 092 | 099 | 105 | 112 | 119 | 125 | 132 | 138 | 145 |
| 663 | 151 | 158 | 164 | 171 | 178 | 184 | 191 | 197 | 204 | 210 |
| 664 | 217 | 223 | 230 | 236 | 243 | 249 | 256 | 263 | 269 | 276 |
| 665 | 282 | 289 | 295 | 302 | 308 | 315 | 321 | 328 | 334 | 341 |
| 666 | 347 | 354 | 360 | 367 | 373 | 380 | 387 | 393 | 400 | 406 |
| 667 | 413 | 419 | 426 | 432 | 439 | 445 | 452 | 458 | 465 | 471 |
| 668 | 478 | 484 | 491 | 497 | 504 | 510 | 517 | 523 | 530 | 536 |
| 669 | 543 | 549 | 556 | 562 | 569 | 575 | 582 | 588 | 595 | 601 |
| 670 | 607 | 614 | 620 | 627 | 633 | 640 | 646 | 653 | 659 | 666 |
| 671 | 672 | 679 | 685 | 692 | 698 | 705 | 711 | 718 | 724 | 730 |
| 672 | 737 | 743 | 750 | 756 | 763 | 769 | 776 | 782 | 789 | 795 |
| 673 | 802 | 808 | 814 | 821 | 827 | 834 | 840 | 847 | 853 | 860 |
| 674 | 866 | 872 | 879 | 885 | 892 | 898 | 905 | 911 | 918 | 924 |
| 675 | 930 | 937 | 943 | 950 | 956 | 963 | 969 | 975 | 982 | 988 |
| 676 | 995 | *001 | *008 | *014 | *020 | *027 | *033 | *040 | *046 | *052 |
| 677 | 83 059 | 065 | 072 | 078 | 085 | 091 | 097 | 104 | 110 | 117 |
| 678 | 123 | 129 | 136 | 142 | 149 | 155 | 161 | 168 | 174 | 181 |
| 679 | 187 | 193 | 200 | 206 | 213 | 219 | 225 | 232 | 238 | 245 |
| 680 | 251 | 257 | 264 | 270 | 276 | 283 | 289 | 296 | 302 | 308 |
| 681 | 315 | 321 | 327 | 334 | 340 | 347 | 353 | 359 | 366 | 372 |
| 682 | 378 | 385 | 391 | 398 | 404 | 410 | 417 | 423 | 429 | 436 |
| 683 | 442 | 448 | 455 | 461 | 467 | 474 | 480 | 487 | 493 | 499 |
| 684 | 506 | 512 | 518 | 525 | 531 | 537 | 544 | 550 | 556 | 563 |

| 3. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 685 | 83 569 | 575 | 582 | 588 | 594 | 601 | 607 | 613 | 620 | 626 |
| 686 | 632 | 639 | 645 | 651 | 658 | 664 | 670 | 677 | 683 | 689 |
| 687 | 696 | 702 | 708 | 715 | 721 | 727 | 734 | 740 | 746 | 753 |
| 688 | 759 | 765 | 771 | 778 | 784 | 790 | 797 | 803 | 809 | 816 |
| 689 | 822 | 828 | 835 | 841 | 847 | 853 | 860 | 866 | 872 | 879 |
| 690 | 885 | 891 | 897 | 904 | 910 | 916 | 923 | 929 | 935 | 942 |
| 691 | 948 | 954 | 960 | 967 | 973 | 979 | 985 | 992 | 998 | *004 |
| 692 | 84 011 | 017 | 023 | 029 | 036 | 042 | 048 | 055 | 061 | 067 |
| 693 | 073 | 080 | 086 | 092 | 098 | 105 | 111 | 117 | 123 | 130 |
| 694 | 136 | 142 | 148 | 155 | 161 | 167 | 173 | 180 | 186 | 192 |
| 695 | 198 | 205 | 211 | 217 | 223 | 230 | 236 | 242 | 248 | 255 |
| 696 | 261 | 267 | 273 | 280 | 286 | 292 | 298 | 305 | 311 | 317 |
| 697 | 323 | 330 | 336 | 342 | 348 | 354 | 361 | 367 | 373 | 379 |
| 698 | 386 | 392 | 398 | 404 | 410 | 417 | 423 | 429 | 435 | 442 |
| 699 | 448 | 454 | 460 | 466 | 473 | 479 | 485 | 491 | 497 | 504 |
| 700 | 510 | 516 | 522 | 528 | 535 | 541 | 547 | 553 | 559 | 566 |
| 701 | 572 | 578 | 584 | 590 | 597 | 603 | 609 | 615 | 621 | 628 |
| 702 | 634 | 640 | 646 | 652 | 658 | 665 | 671 | 677 | 683 | 689 |
| 703 | 696 | 702 | 708 | 714 | 720 | 726 | 733 | 739 | 745 | 751 |
| 704 | 757 | 763 | 770 | 776 | 782 | 788 | 794 | 800 | 807 | 813 |
| 705 | 819 | 825 | 831 | 837 | 844 | 850 | 856 | 862 | 868 | 874 |
| 706 | 880 | 887 | 893 | 899 | 905 | 911 | 917 | 924 | 930 | 936 |
| 707 | 942 | 948 | 954 | 960 | 967 | 973 | 979 | 985 | 991 | 997 |
| 708 | 85 003 | 009 | 016 | 022 | 028 | 034 | 040 | 046 | 052 | 058 |
| 709 | 065 | 071 | 077 | 083 | 089 | 095 | 101 | 107 | 114 | 120 |
| 710 | 126 | 132 | 138 | 144 | 150 | 156 | 163 | 169 | 175 | 181 |
| 711 | 187 | 193 | 199 | 205 | 211 | 217 | 224 | 230 | 236 | 242 |
| 712 | 248 | 254 | 260 | 266 | 272 | 278 | 285 | 291 | 297 | 303 |
| 713 | 309 | 315 | 321 | 327 | 333 | 339 | 345 | 352 | 358 | 364 |
| 714 | 370 | 376 | 382 | 388 | 394 | 400 | 406 | 412 | 418 | 425 |
| 715 | 431 | 437 | 443 | 449 | 455 | 461 | 467 | 473 | 479 | 485 |
| 716 | 491 | 497 | 503 | 509 | 516 | 522 | 528 | 534 | 540 | 546 |
| 717 | 552 | 558 | 564 | 570 | 576 | 582 | 588 | 594 | 600 | 606 |
| 718 | 612 | 618 | 625 | 631 | 637 | 643 | 649 | 655 | 661 | 667 |
| 719 | 673 | 679 | 685 | 691 | 697 | 703 | 709 | 715 | 721 | 727 |
| 720 | 733 | 739 | 745 | 751 | 757 | 763 | 769 | 775 | 781 | 788 |
| 721 | 794 | 800 | 806 | 812 | 818 | 824 | 830 | 836 | 842 | 848 |
| 722 | 854 | 860 | 866 | 872 | 878 | 884 | 890 | 896 | 902 | 908 |
| 723 | 914 | 920 | 926 | 932 | 938 | 944 | 950 | 956 | 962 | 968 |
| 724 | 974 | 980 | 986 | 992 | 998 | *004 | *010 | *016 | *022 | *028 |
| 725 | 86 034 | 040 | 046 | 052 | 058 | 064 | 070 | 076 | 082 | 088 |
| 726 | 094 | 100 | 106 | 112 | 118 | 124 | 130 | 136 | 141 | 147 |
| 727 | 153 | 159 | 165 | 171 | 177 | 183 | 189 | 195 | 201 | 207 |
| 728 | 213 | 219 | 225 | 231 | 237 | 243 | 249 | 255 | 261 | 267 |
| 729 | 273 | 279 | 285 | 291 | 297 | 303 | 308 | 314 | 320 | 326 |

| 3. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 730 | 86 332 | 338 | 344 | 350 | 356 | 362 | 368 | 374 | 380 | 386 |
| 731 | 392 | 398 | 404 | 410 | 415 | 421 | 427 | 433 | 439 | 445 |
| 732 | 451 | 457 | 463 | 469 | 475 | 481 | 487 | 493 | 499 | 504 |
| 733 | 510 | 516 | 522 | 528 | 534 | 540 | 546 | 552 | 558 | 564 |
| 734 | 570 | 576 | 581 | 587 | 593 | 599 | 605 | 611 | 617 | 623 |
| 735 | 629 | 635 | 641 | 646 | 652 | 658 | 664 | 670 | 676 | 682 |
| 736 | 688 | 694 | 700 | 705 | 711 | 717 | 723 | 729 | 735 | 741 |
| 737 | 747 | 753 | 759 | 764 | 770 | 776 | 782 | 788 | 794 | 800 |
| 738 | 806 | 812 | 817 | 823 | 829 | 835 | 841 | 847 | 853 | 859 |
| 739 | 864 | 870 | 876 | 882 | 888 | 894 | 900 | 906 | 911 | 917 |
| 740 | 923 | 929 | 935 | 941 | 947 | 953 | 958 | 964 | 970 | 976 |
| 741 | 982 | 988 | 994 | 999 | *005 | *011 | *017 | *023 | *029 | *035 |
| 742 | 87 040 | 046 | 052 | 058 | 064 | 070 | 075 | 081 | 087 | 093 |
| 743 | 099 | 105 | 111 | 116 | 122 | 128 | 134 | 140 | 146 | 151 |
| 744 | 157 | 163 | 169 | 175 | 181 | 186 | 192 | 198 | 204 | 210 |
| 745 | 216 | 221 | 227 | 233 | 239 | 245 | 251 | 256 | 262 | 268 |
| 746 | 274 | 280 | 286 | 291 | 297 | 303 | 309 | 315 | 320 | 326 |
| 747 | 332 | 338 | 344 | 349 | 355 | 361 | 367 | 373 | 379 | 384 |
| 748 | 390 | 396 | 402 | 408 | 413 | 419 | 425 | 431 | 437 | 442 |
| 749 | 448 | 454 | 460 | 466 | 471 | 477 | 483 | 489 | 495 | 500 |
| 750 | 506 | 512 | 518 | 523 | 529 | 535 | 541 | 547 | 552 | 558 |
| 751 | 564 | 570 | 576 | 581 | 587 | 593 | 599 | 604 | 610 | 616 |
| 752 | 622 | 628 | 633 | 639 | 645 | 651 | 656 | 662 | 668 | 674 |
| 753 | 679 | 685 | 691 | 697 | 703 | 708 | 714 | 720 | 726 | 731 |
| 754 | 737 | 743 | 749 | 754 | 760 | 766 | 772 | 777 | 783 | 789 |
| 755 | 795 | 800 | 806 | 812 | 818 | 823 | 829 | 835 | 841 | 846 |
| 756 | 852 | 858 | 864 | 869 | 875 | 881 | 887 | 892 | 898 | 904 |
| 757 | 910 | 915 | 921 | 927 | 933 | 938 | 944 | 950 | 955 | 961 |
| 758 | 967 | 973 | 978 | 984 | 990 | 996 | *001 | *007 | *013 | *018 |
| 759 | 88 024 | 030 | 036 | 041 | 047 | 053 | 058 | 064 | 070 | 076 |
| 760 | 081 | 087 | 093 | 098 | 104 | 110 | 116 | 121 | 127 | 133 |
| 761 | 138 | 144 | 150 | 156 | 161 | 167 | 173 | 178 | 184 | 190 |
| 762 | 195 | 201 | 207 | 213 | 218 | 224 | 230 | 235 | 241 | 247 |
| 763 | 252 | 258 | 264 | 270 | 275 | 281 | 287 | 292 | 298 | 304 |
| 764 | 309 | 315 | 321 | 326 | 332 | 338 | 343 | 349 | 355 | 360 |
| 765 | 366 | 372 | 377 | 383 | 389 | 395 | 400 | 406 | 412 | 417 |
| 766 | 423 | 429 | 434 | 440 | 446 | 451 | 457 | 463 | 468 | 474 |
| 767 | 480 | 485 | 491 | 497 | 502 | 508 | 513 | 519 | 525 | 530 |
| 768 | 536 | 542 | 547 | 553 | 559 | 564 | 570 | 576 | 581 | 587 |
| 769 | 593 | 598 | 604 | 610 | 615 | 621 | 627 | 632 | 638 | 643 |
| 770 | 649 | 655 | 660 | 666 | 672 | 677 | 683 | 689 | 694 | 700 |
| 771 | 705 | 711 | 717 | 722 | 728 | 734 | 739 | 745 | 750 | 756 |
| 772 | 762 | 767 | 773 | 779 | 784 | 790 | 795 | 801 | 807 | 812 |
| 773 | 818 | 824 | 829 | 835 | 840 | 846 | 852 | 857 | 863 | 868 |
| 774 | 874 | 880 | 885 | 891 | 897 | 902 | 908 | 913 | 919 | 925 |

| 3. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 775 | 88 930 | 936 | 941 | 947 | 953 | 958 | 964 | 969 | 975 | 981 |
| 776 | 986 | 992 | 997 | *003 | *009 | *014 | *020 | *025 | *031 | *037 |
| 777 | 89 042 | 048 | 053 | 059 | 064 | 070 | 076 | 081 | 087 | 092 |
| 778 | 098 | 104 | 109 | 115 | 120 | 126 | 131 | 137 | 143 | 148 |
| 779 | 154 | 159 | 165 | 170 | 176 | 182 | 187 | 193 | 198 | 204 |
| 780 | 209 | 215 | 221 | 226 | 232 | 237 | 243 | 248 | 254 | 260 |
| 781 | 265 | 271 | 276 | 282 | 287 | 293 | 298 | 304 | 310 | 315 |
| 782 | 321 | 326 | 332 | 337 | 343 | 348 | 354 | 360 | 365 | 371 |
| 783 | 376 | 382 | 387 | 393 | 398 | 404 | 409 | 415 | 421 | 426 |
| 784 | 432 | 437 | 443 | 448 | 454 | 459 | 465 | 470 | 476 | 481 |
| 785 | 487 | 492 | 498 | 504 | 509 | 515 | 520 | 526 | 531 | 537 |
| 786 | 542 | 548 | 553 | 559 | 564 | 570 | 575 | 581 | 586 | 592 |
| 787 | 597 | 603 | 609 | 614 | 620 | 625 | 631 | 636 | 642 | 647 |
| 788 | 653 | 658 | 664 | 669 | 675 | 680 | 686 | 691 | 697 | 702 |
| 789 | 708 | 713 | 719 | 724 | 730 | 735 | 741 | 746 | 752 | 757 |
| 790 | 763 | 768 | 774 | 779 | 785 | 790 | 796 | 801 | 807 | 812 |
| 791 | 818 | 823 | 829 | 834 | 840 | 845 | 851 | 856 | 862 | 867 |
| 792 | 873 | 878 | 883 | 889 | 894 | 900 | 905 | 911 | 916 | 922 |
| 793 | 927 | 933 | 938 | 944 | 949 | 955 | 960 | 966 | 971 | 977 |
| 794 | 982 | 988 | 993 | 998 | *004 | *009 | *015 | *020 | *026 | *031 |
| 795 | 90 037 | 042 | 048 | 053 | 059 | 064 | 069 | 075 | 080 | 086 |
| 796 | 091 | 097 | 102 | 108 | 113 | 119 | 124 | 129 | 135 | 140 |
| 797 | 146 | 151 | 157 | 162 | 168 | 173 | 179 | 184 | 189 | 195 |
| 798 | 200 | 206 | 211 | 217 | 222 | 227 | 233 | 238 | 244 | 249 |
| 799 | 255 | 260 | 266 | 271 | 276 | 282 | 287 | 293 | 298 | 304 |
| 800 | 309 | 314 | 320 | 325 | 331 | 336 | 342 | 347 | 352 | 358 |
| 801 | 363 | 369 | 374 | 380 | 385 | 390 | 396 | 401 | 407 | 412 |
| 802 | 417 | 423 | 428 | 434 | 439 | 445 | 450 | 455 | 461 | 466 |
| 803 | 472 | 477 | 482 | 488 | 493 | 499 | 504 | 509 | 515 | 520 |
| 804 | 526 | 531 | 536 | 542 | 547 | 553 | 558 | 563 | 569 | 574 |
| 805 | 580 | 585 | 590 | 596 | 601 | 607 | 612 | 617 | 623 | 628 |
| 806 | 634 | 639 | 644 | 650 | 655 | 660 | 666 | 671 | 677 | 682 |
| 807 | 687 | 693 | 698 | 703 | 709 | 714 | 720 | 725 | 730 | 736 |
| 808 | 741 | 747 | 752 | 757 | 763 | 768 | 773 | 779 | 784 | 789 |
| 809 | 795 | 800 | 806 | 811 | 816 | 822 | 827 | 832 | 838 | 843 |
| 810 | 849 | 854 | 859 | 865 | 870 | 875 | 881 | 886 | 891 | 897 |
| 811 | 902 | 907 | 913 | 918 | 924 | 929 | 934 | 940 | 945 | 950 |
| 812 | 956 | 961 | 966 | 972 | 977 | 982 | 988 | 993 | 998 | *004 |
| 813 | 91 009 | 014 | 020 | 025 | 030 | 036 | 041 | 046 | 052 | 057 |
| 814 | 062 | 068 | 073 | 078 | 084 | 089 | 094 | 100 | 105 | 110 |
| 815 | 116 | 121 | 126 | 132 | 137 | 142 | 148 | 153 | 158 | 164 |
| 816 | 169 | 174 | 180 | 185 | 190 | 196 | 201 | 206 | 212 | 217 |
| 817 | 222 | 228 | 233 | 238 | 243 | 249 | 254 | 259 | 265 | 270 |
| 818 | 275 | 281 | 286 | 291 | 297 | 302 | 307 | 312 | 318 | 323 |
| 819 | 328 | 334 | 339 | 344 | 350 | 355 | 360 | 365 | 371 | 376 |

| 3. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 820 | 91 381 | 387 | 392 | 397 | 403 | 408 | 413 | 418 | 424 | 429 |
| 821 | 434 | 440 | 445 | 450 | 455 | 461 | 466 | 471 | 477 | 482 |
| 822 | 487 | 492 | 498 | 503 | 508 | 514 | 519 | 524 | 529 | 535 |
| 823 | 540 | 545 | 551 | 556 | 561 | 566 | 572 | 577 | 582 | 587 |
| 824 | 593 | 598 | 603 | 609 | 614 | 619 | 624 | 630 | 635 | 640 |
| 825 | 645 | 651 | 656 | 661 | 666 | 672 | 677 | 682 | 687 | 693 |
| 826 | 698 | 703 | 709 | 714 | 719 | 724 | 730 | 735 | 740 | 745 |
| 827 | 751 | 756 | 761 | 766 | 772 | 777 | 782 | 787 | 793 | 798 |
| 828 | 803 | 808 | 814 | 819 | 824 | 829 | 834 | 840 | 845 | 850 |
| 829 | 855 | 861 | 866 | 871 | 876 | 882 | 887 | 892 | 897 | 903 |
| 830 | 908 | 913 | 918 | 924 | 929 | 934 | 939 | 944 | 950 | 955 |
| 831 | 960 | 965 | 971 | 976 | 981 | 986 | 991 | 997 | *002 | *007 |
| 832 | 92 012 | 018 | 023 | 028 | 033 | 038 | 044 | 049 | 054 | 059 |
| 833 | 065 | 070 | 075 | 080 | 085 | 091 | 096 | 101 | 106 | 111 |
| 834 | 117 | 122 | 127 | 132 | 137 | 143 | 148 | 153 | 158 | 163 |
| 835 | 169 | 174 | 179 | 184 | 189 | 195 | 200 | 205 | 210 | 215 |
| 836 | 221 | 226 | 231 | 236 | 241 | 247 | 252 | 257 | 262 | 267 |
| 837 | 273 | 278 | 283 | 288 | 293 | 298 | 304 | 309 | 314 | 319 |
| 838 | 324 | 330 | 335 | 340 | 345 | 350 | 355 | 361 | 366 | 371 |
| 839 | 376 | 381 | 387 | 392 | 297 | 402 | 407 | 412 | 418 | 423 |
| 840 | 428 | 433 | 438 | 443 | 449 | 454 | 459 | 464 | 469 | 474 |
| 841 | 480 | 485 | 490 | 495 | 500 | 505 | 511 | 516 | 521 | 526 |
| 842 | 531 | 536 | 542 | 547 | 552 | 557 | 562 | 567 | 572 | 578 |
| 843 | 583 | 588 | 593 | 598 | 603 | 609 | 614 | 619 | 624 | 629 |
| 844 | 634 | 639 | 645 | 650 | 655 | 660 | 665 | 670 | 675 | 681 |
| 845 | 686 | 691 | 696 | 701 | 706 | 711 | 716 | 722 | 727 | 732 |
| 846 | 737 | 742 | 747 | 752 | 758 | 763 | 768 | 773 | 778 | 783 |
| 847 | 788 | 793 | 799 | 804 | 809 | 814 | 819 | 824 | 829 | 834 |
| 848 | 840 | 845 | 850 | 855 | 860 | 865 | 870 | 875 | 881 | 886 |
| 849 | 891 | 896 | 901 | 906 | 911 | 916 | 921 | 927 | 932 | 937 |
| 850 | 942 | 947 | 952 | 957 | 962 | 967 | 973 | 978 | 983 | 988 |
| 851 | 993 | 998 | *003 | *008 | *013 | *018 | *024 | *029 | *034 | *039 |
| 852 | 93 044 | 049 | 054 | 059 | 064 | 069 | 075 | 080 | 085 | 090 |
| 853 | 095 | 100 | 105 | 110 | 115 | 120 | 125 | 131 | 136 | 141 |
| 854 | 146 | 151 | 156 | 161 | 166 | 171 | 176 | 181 | 186 | 192 |
| 855 | 197 | 202 | 207 | 212 | 217 | 222 | 227 | 232 | 237 | 242 |
| 856 | 247 | 252 | 258 | 263 | 268 | 273 | 278 | 283 | 288 | 293 |
| 857 | 298 | 303 | 308 | 313 | 318 | 323 | 328 | 334 | 339 | 344 |
| 858 | 349 | 354 | 359 | 364 | 369 | 374 | 379 | 384 | 389 | 394 |
| 859 | 399 | 404 | 409 | 414 | 420 | 425 | 430 | 435 | 440 | 445 |
| 860 | 450 | 455 | 460 | 465 | 470 | 475 | 480 | 485 | 490 | 495 |
| 861 | 500 | 505 | 510 | 515 | 520 | 526 | 531 | 536 | 541 | 546 |
| 862 | 551 | 556 | 561 | 566 | 571 | 576 | 581 | 586 | 591 | 596 |
| 863 | 601 | 606 | 611 | 616 | 621 | 626 | 631 | 636 | 641 | 646 |
| 864 | 651 | 656 | 661 | 666 | 671 | 676 | 682 | 687 | 692 | 697 |

| 3. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 865 | 93 702 | 707 | 712 | 717 | 722 | 727 | 732 | 737 | 742 | 747 |
| 866 | 752 | 757 | 762 | 767 | 772 | 777 | 782 | 787 | 792 | 797 |
| 867 | 802 | 807 | 812 | 817 | 822 | 827 | 832 | 837 | 842 | 847 |
| 868 | 852 | 857 | 862 | 867 | 872 | 877 | 882 | 887 | 892 | 897 |
| 869 | 902 | 907 | 912 | 917 | 922 | 927 | 932 | 937 | 942 | 947 |
| 870 | 952 | 957 | 962 | 967 | 972 | 977 | 982 | 987 | 992 | 997 |
| 871 | 94 002 | 007 | 012 | 017 | 022 | 027 | 032 | 037 | 042 | 047 |
| 872 | 052 | 057 | 062 | 067 | 072 | 077 | 082 | 086 | 091 | 096 |
| 873 | 101 | 106 | 111 | 116 | 121 | 126 | 131 | 136 | 141 | 146 |
| 874 | 151 | 156 | 161 | 166 | 171 | 176 | 181 | 186 | 191 | 196 |
| 875 | 201 | 206 | 211 | 216 | 221 | 226 | 231 | 236 | 240 | 245 |
| 876 | 250 | 255 | 260 | 265 | 270 | 275 | 280 | 285 | 290 | 295 |
| 877 | 300 | 305 | 310 | 315 | 320 | 325 | 330 | 335 | 340 | 345 |
| 878 | 349 | 354 | 359 | 364 | 369 | 374 | 379 | 384 | 389 | 394 |
| 879 | 399 | 404 | 409 | 414 | 419 | 424 | 429 | 433 | 438 | 443 |
| 880 | 448 | 453 | 458 | 463 | 468 | 473 | 478 | 483 | 488 | 493 |
| 881 | 498 | 503 | 507 | 512 | 517 | 522 | 527 | 532 | 537 | 542 |
| 882 | 547 | 552 | 557 | 562 | 567 | 571 | 576 | 581 | 586 | 591 |
| 883 | 596 | 601 | 606 | 611 | 616 | 621 | 626 | 630 | 635 | 640 |
| 884 | 645 | 650 | 655 | 660 | 665 | 670 | 675 | 680 | 685 | 689 |
| 885 | 694 | 699 | 704 | 709 | 714 | 719 | 724 | 729 | 734 | 738 |
| 886 | 743 | 748 | 753 | 758 | 763 | 768 | 773 | 778 | 783 | 787 |
| 887 | 792 | 797 | 802 | 807 | 812 | 817 | 822 | 827 | 832 | 836 |
| 888 | 841 | 846 | 851 | 856 | 861 | 866 | 871 | 876 | 880 | 885 |
| 889 | 890 | 895 | 900 | 905 | 910 | 915 | 919 | 924 | 929 | 934 |
| 890 | 939 | 944 | 949 | 954 | 959 | 963 | 968 | 973 | 978 | 983 |
| 891 | 988 | 993 | 998 | *002 | *007 | *012 | *017 | *022 | *027 | *032 |
| 892 | 95 036 | 041 | 046 | 051 | 056 | 061 | 066 | 071 | 075 | 080 |
| 893 | 085 | 090 | 095 | 100 | 105 | 109 | 114 | 119 | 124 | 129 |
| 894 | 134 | 139 | 143 | 148 | 153 | 158 | 163 | 168 | 173 | 177 |
| 895 | 182 | 187 | 192 | 197 | 202 | 207 | 211 | 216 | 221 | 226 |
| 896 | 231 | 236 | 240 | 245 | 250 | 255 | 260 | 265 | 270 | 274 |
| 897 | 279 | 284 | 289 | 294 | 299 | 303 | 308 | 313 | 318 | 323 |
| 898 | 328 | 332 | 337 | 342 | 347 | 352 | 357 | 361 | 366 | 371 |
| 899 | 376 | 381 | 386 | 390 | 395 | 400 | 405 | 410 | 415 | 419 |
| 900 | 424 | 429 | 434 | 439 | 444 | 448 | 453 | 458 | 463 | 468 |
| 901 | 472 | 477 | 482 | 487 | 492 | 497 | 501 | 506 | 511 | 516 |
| 902 | 521 | 525 | 530 | 535 | 540 | 545 | 550 | 554 | 559 | 564 |
| 903 | 569 | 574 | 578 | 583 | 588 | 593 | 598 | 602 | 607 | 612 |
| 904 | 617 | 622 | 626 | 631 | 636 | 641 | 646 | 650 | 655 | 660 |
| 905 | 665 | 670 | 674 | 679 | 684 | 689 | 694 | 698 | 703 | 708 |
| 906 | 713 | 718 | 722 | 727 | 732 | 737 | 742 | 746 | 751 | 756 |
| 907 | 761 | 766 | 770 | 775 | 780 | 785 | 789 | 794 | 799 | 804 |
| 908 | 809 | 813 | 818 | 823 | 828 | 832 | 837 | 842 | 847 | 852 |
| 909 | 856 | 861 | 866 | 871 | 875 | 880 | 885 | 890 | 895 | 899 |

| 3. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 910 | 95 904 | 909 | 914 | 918 | 923 | 928 | 933 | 938 | 942 | 947 |
| 911 | 952 | 957 | 961 | 966 | 971 | 976 | 980 | 985 | 990 | 995 |
| 912 | 999 | *004 | *009 | *014 | *019 | *023 | *028 | *033 | *038 | *042 |
| 913 | 96 047 | 052 | 057 | 061 | 066 | 071 | 076 | 080 | 085 | 090 |
| 914 | 095 | 099 | 104 | 109 | 114 | 118 | 123 | 128 | 133 | 137 |
| 915 | 142 | 147 | 152 | 156 | 161 | 166 | 171 | 175 | 180 | 185 |
| 916 | 190 | 194 | 199 | 204 | 209 | 213 | 218 | 223 | 227 | 232 |
| 917 | 237 | 242 | 246 | 251 | 256 | 261 | 265 | 270 | 275 | 280 |
| 918 | 284 | 289 | 294 | 298 | 303 | 308 | 313 | 317 | 322 | 327 |
| 919 | 332 | 336 | 341 | 346 | 350 | 355 | 360 | 365 | 369 | 374 |
| 920 | 379 | 384 | 388 | 393 | 398 | 402 | 407 | 412 | 417 | 421 |
| 921 | 426 | 431 | 435 | 440 | 445 | 450 | 454 | 459 | 464 | 468 |
| 922 | 473 | 478 | 483 | 487 | 492 | 497 | 501 | 506 | 511 | 515 |
| 923 | 520 | 525 | 530 | 534 | 539 | 544 | 548 | 553 | 558 | 562 |
| 924 | 567 | 572 | 577 | 581 | 586 | 591 | 595 | 600 | 605 | 609 |
| 925 | 614 | 619 | 624 | 628 | 633 | 638 | 642 | 647 | 652 | 656 |
| 926 | 661 | 666 | 670 | 675 | 680 | 685 | 689 | 694 | 699 | 703 |
| 927 | 708 | 713 | 717 | 722 | 727 | 731 | 736 | 741 | 745 | 750 |
| 928 | 755 | 759 | 764 | 769 | 774 | 778 | 783 | 788 | 792 | 797 |
| 929 | 802 | 806 | 811 | 816 | 820 | 825 | 830 | 834 | 839 | 844 |
| 930 | 848 | 853 | 858 | 862 | 867 | 872 | 876 | 881 | 886 | 890 |
| 931 | 895 | 900 | 904 | 909 | 914 | 918 | 923 | 928 | 932 | 937 |
| 932 | 942 | 946 | 951 | 956 | 960 | 965 | 970 | 974 | 979 | 984 |
| 933 | 988 | 993 | 997 | *002 | *007 | *011 | *016 | *021 | *025 | *030 |
| 934 | 97 035 | 039 | 044 | 049 | 053 | 058 | 063 | 067 | 072 | 077 |
| 935 | 081 | 086 | 090 | 095 | 100 | 104 | 109 | 114 | 118 | 123 |
| 936 | 128 | 132 | 137 | 142 | 146 | 151 | 155 | 160 | 165 | 169 |
| 937 | 174 | 179 | 183 | 188 | 192 | 197 | 202 | 206 | 211 | 216 |
| 938 | 220 | 225 | 230 | 234 | 239 | 243 | 248 | 253 | 257 | 262 |
| 939 | 267 | 271 | 276 | 280 | 285 | 290 | 294 | 299 | 304 | 308 |
| 940 | 313 | 317 | 322 | 327 | 331 | 336 | 340 | 345 | 350 | 354 |
| 941 | 359 | 364 | 368 | 373 | 377 | 382 | 387 | 391 | 396 | 400 |
| 942 | 405 | 410 | 414 | 419 | 424 | 428 | 433 | 437 | 442 | 447 |
| 943 | 451 | 456 | 460 | 465 | 470 | 474 | 479 | 483 | 488 | 493 |
| 944 | 497 | 502 | 506 | 511 | 516 | 520 | 525 | 529 | 534 | 539 |
| 945 | 543 | 548 | 552 | 557 | 562 | 566 | 571 | 575 | 580 | 585 |
| 946 | 589 | 594 | 598 | 603 | 607 | 612 | 617 | 621 | 626 | 630 |
| 947 | 635 | 640 | 644 | 649 | 653 | 658 | 663 | 667 | 672 | 676 |
| 948 | 681 | 685 | 690 | 695 | 699 | 704 | 708 | 713 | 717 | 722 |
| 949 | 727 | 731 | 736 | 740 | 745 | 749 | 754 | 759 | 763 | 768 |
| 950 | 772 | 777 | 782 | 786 | 791 | 795 | 800 | 804 | 809 | 813 |
| 951 | 818 | 823 | 827 | 832 | 836 | 841 | 845 | 850 | 855 | 859 |
| 952 | 864 | 868 | 873 | 877 | 882 | 886 | 891 | 896 | 900 | 905 |
| 953 | 909 | 914 | 918 | 923 | 928 | 932 | 937 | 941 | 946 | 950 |
| 954 | 955 | 959 | 964 | 968 | 973 | 978 | 982 | 987 | 991 | 996 |

| 3. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 955 | 98 000 | 005 | 009 | 014 | 019 | 023 | 028 | 032 | 037 | 041 |
| 956 | 046 | 050 | 055 | 059 | 064 | 068 | 073 | 078 | 082 | 087 |
| 957 | 091 | 096 | 100 | 105 | 109 | 114 | 118 | 123 | 127 | 132 |
| 958 | 137 | 141 | 146 | 150 | 155 | 159 | 164 | 168 | 173 | 177 |
| 959 | 182 | 186 | 191 | 195 | 200 | 204 | 209 | 214 | 218 | 223 |
| 960 | 227 | 232 | 236 | 241 | 245 | 250 | 254 | 259 | 263 | 268 |
| 961 | 272 | 277 | 281 | 286 | 290 | 295 | 299 | 304 | 308 | 313 |
| 962 | 318 | 322 | 327 | 331 | 336 | 340 | 345 | 349 | 354 | 358 |
| 963 | 363 | 367 | 372 | 376 | 381 | 385 | 390 | 394 | 399 | 403 |
| 964 | 408 | 412 | 417 | 421 | 426 | 430 | 435 | 439 | 444 | 448 |
| 965 | 453 | 457 | 462 | 466 | 471 | 475 | 480 | 484 | 489 | 493 |
| 966 | 498 | 502 | 507 | 511 | 516 | 520 | 525 | 529 | 534 | 538 |
| 967 | 543 | 547 | 552 | 556 | 561 | 565 | 570 | 574 | 579 | 583 |
| 968 | 588 | 592 | 597 | 601 | 605 | 610 | 614 | 619 | 623 | 628 |
| 969 | 632 | 637 | 641 | 646 | 650 | 655 | 659 | 664 | 668 | 673 |
| 970 | 677 | 682 | 686 | 691 | 695 | 700 | 704 | 709 | 713 | 717 |
| 971 | 722 | 726 | 731 | 735 | 740 | 744 | 749 | 753 | 758 | 762 |
| 972 | 767 | 771 | 776 | 780 | 784 | 789 | 793 | 798 | 802 | 807 |
| 973 | 811 | 816 | 820 | 825 | 829 | 834 | 838 | 843 | 847 | 851 |
| 974 | 856 | 860 | 865 | 869 | 874 | 878 | 883 | 887 | 892 | 896 |
| 975 | 900 | 905 | 909 | 914 | 918 | 923 | 927 | 932 | 936 | 941 |
| 976 | 945 | 949 | 954 | 958 | 963 | 967 | 972 | 976 | 981 | 985 |
| 977 | 989 | 994 | 998 | *003 | *007 | *012 | *016 | *021 | *025 | *029 |
| 978 | 99 034 | 038 | 043 | 047 | 052 | 056 | 061 | 065 | 069 | 074 |
| 979 | 078 | 083 | 087 | 092 | 096 | 100 | 105 | 109 | 114 | 118 |
| 980 | 123 | 127 | 131 | 136 | 140 | 145 | 149 | 154 | 158 | 162 |
| 981 | 167 | 171 | 176 | 180 | 185 | 189 | 193 | 198 | 202 | 207 |
| 982 | 211 | 216 | 220 | 224 | 229 | 233 | 238 | 242 | 247 | 251 |
| 983 | 255 | 260 | 264 | 269 | 273 | 277 | 282 | 286 | 291 | 295 |
| 984 | 300 | 304 | 308 | 313 | 317 | 322 | 326 | 330 | 335 | 339 |
| 985 | 344 | 348 | 352 | 357 | 361 | 366 | 370 | 374 | 379 | 383 |
| 986 | 388 | 392 | 396 | 401 | 405 | 410 | 414 | 419 | 423 | 427 |
| 987 | 432 | 436 | 441 | 445 | 449 | 454 | 458 | 463 | 467 | 471 |
| 988 | 476 | 480 | 484 | 489 | 493 | 498 | 502 | 506 | 511 | 515 |
| 989 | 520 | 524 | 528 | 533 | 537 | 542 | 546 | 550 | 555 | 559 |
| 990 | 564 | 568 | 572 | 577 | 581 | 585 | 590 | 594 | 599 | 603 |
| 991 | 607 | 612 | 616 | 621 | 625 | 629 | 634 | 638 | 642 | 647 |
| 992 | 651 | 656 | 660 | 664 | 669 | 673 | 677 | 682 | 686 | 691 |
| 993 | 695 | 699 | 704 | 708 | 712 | 717 | 721 | 726 | 730 | 734 |
| 994 | 739 | 743 | 747 | 752 | 756 | 760 | 765 | 769 | 774 | 778 |
| 995 | 782 | 787 | 791 | 795 | 800 | 804 | 808 | 813 | 817 | 822 |
| 996 | 826 | 830 | 835 | 839 | 843 | 848 | 852 | 856 | 861 | 865 |
| 997 | 870 | 874 | 878 | 883 | 887 | 891 | 896 | 900 | 904 | 909 |
| 998 | 913 | 917 | 922 | 926 | 930 | 935 | 939 | 944 | 948 | 952 |
| 999 | 957 | 961 | 965 | 970 | 974 | 978 | 983 | 987 | 991 | 996 |

BSB
MÜNCHEN

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Wandner, Johann Baptist,

Grundzüge der allgemeinen Arithmetik für den ersten Unterricht, besonders an technischen Schulen

Sulzbach 1837

Math.p. 745 s
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083382-1